ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ φροντιστήριο
Α. Οικονομόπουλος – Κ. Ρούτης
Κάνιγγος 12, Πλ.Κάνιγγος
τηλ. 3824659,3830085
Internet: www.theorhtiko.gr

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Βλέπε σελ.253 του σχολικού βιβλίου.

Α2. Βλέπε σελ.191 του σχολικού βιβλίου.

Α3. Βλέπε σελ.258 του σχολικού βιβλίου.

Α4.

α) → Σωστό
β) → Σωστό
γ) → Λάθος
δ) → Λάθος
ε) → Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. $|z-1|^2+|z-1|^2=4$

$|w-5\overline{w}|=12$

$(z-1)(\overline{z}-1)+(z+1)(\overline{z}+1)=4 \Leftrightarrow z\overline{z}-z-\overline{z}+1+z\overline{z}+z+\overline{z}+1=4 \Leftrightarrow$

$2|z|^2=2 \Leftrightarrow |z|=1$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

B2.

<u>α΄ τρόπος:</u>

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 = \sqrt{2}^2 \Leftrightarrow (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = 2 \Leftrightarrow$$

$$z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = 2 \Leftrightarrow$$

$$1 - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + 1 = 2 \Leftrightarrow z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} = 0 \ \ (1)$$

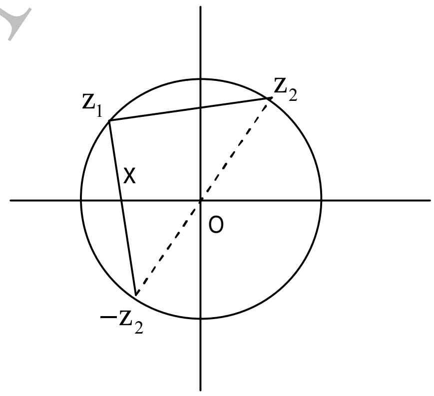
$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} =$$

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} \overset{(1)}{=} 1 + 1 + 0 = 2$$

$$|z_1 + z_2| = \sqrt{2}$$

<u>β΄ τρόπος (γεωμετρικός):</u>

Αν $|z_1 + z_2| = x$ από τη γεωμετρική απεικόνιση των μιγαδικών έχουμε :



$$x^2 + |z_1 - z_2|^2 = (2R)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 2 = 4 \Rightarrow$$

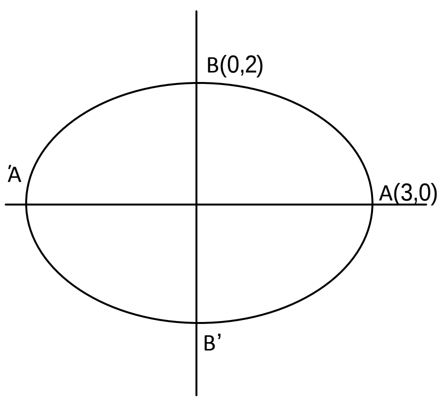
$$\Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

Άρα $|z_1 + z_2| = \sqrt{2}$

B3.

<u>α΄ τρόπος:</u>

Έστω $w = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$ $|w - 5\overline{w}| = 12 \Rightarrow$



$$\Rightarrow |x + yi - 5x + 5yi| = 12 \Rightarrow |-4x + 6yi| = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{16x^2}{144} + \frac{36y^2}{144} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$|w|_{μεγ} = 3$$

$$|w|_{ελ} = 2$$

$$2 \le |w| \le 3$$

β΄ τρόπος:

$$\left|w-5\overline{w}\right|=12\Rightarrow\left|w-5\overline{w}\right|^2=12^2\Rightarrow\left(w-5\overline{w}\right)\left(w+5\overline{w}\right)=144\Rightarrow$$

$$w\overline{w}-5w^2-5\overline{w}^2+25w\overline{w}=144\Rightarrow 26|w|^2-5\left(w^2+\overline{w}^2\right)=144$$

$$26|w|^2-5\left(w+\overline{w}\right)^2+10w\overline{w}=144\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36|w|^2-5\left(w+\overline{w}\right)^2=144\overset{w=x+yi}{\Rightarrow}36x^2+36y^2-20x^2=144$$

$$\Rightarrow\frac{16x^2}{144}+\frac{36y^2}{144}=\frac{144}{144}\Rightarrow\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1(1)$$

Δηλαδή ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w είναι έλλειψη με εξίσωση την (1).

B4.

α΄ τρόπος:

Έχουμε $|z|=1$ και $|z-w|\le|z|+|w|=1+3=4(1)$

$|z-w|\ge\left||z|-|w|\right|=\left|1-|w|\right|(2)$

Έχω $|w|\ge2\Rightarrow-|w|\le-2\Rightarrow1-|w|\le1-2\Rightarrow1-|w|\le-1\Rightarrow$

$\left|1-|w|\right|\ge|-1|\Rightarrow\left|1-|w|\right|\ge1(3)$

Άρα από τις (2), (3) έχουμε $|z-w|\ge1$

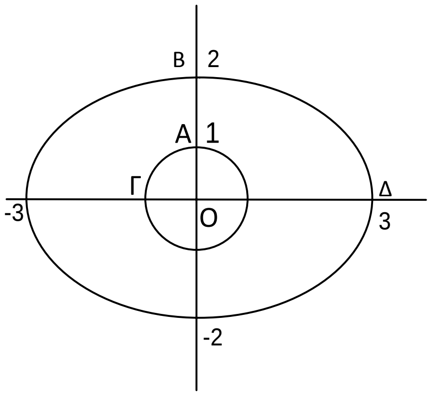
Και λόγω της (1) θα έχουμε τελικά $1\le|z-w|\le4$.

β΄ τρόπος:

Είναι $|z-w|_{min}=(AB)=2-1=1$ και

$|z-w|_{max}=(\Gamma\Delta)=3+1=4$

Άρα $1\le|z-w|\le4$



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο A_f με

$$f'(x)=\ln x+\frac{x-1}{x}=\ln x+1-\frac{1}{x}.$$

	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	
f(x)	↘	↗	

Η $f'(x)=0$ για την προφανή ρίζα x=1 που

είναι και μοναδική γιατί $f''(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0$

στο $(0,+\infty)$ δηλαδή η $f'(x)$ γνησίως άυξουσα.

Οπότε για την f έχουμε:

Γιατί $f'(e)=1+\frac{e-1}{e}>0 \quad f'\left(\frac{1}{e}\right)=-1+1-e<0$

Οπότε για $x\in(0,1]$ η f γνησίως φθίνουσα και στο $[1,+\infty)$ η f γνησίως αύξουσα:

Για το σύνολο τιμών της f :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(x-1)\ln x-1\right]=+\infty\\ f(1)=-1\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x-1)\ln x-1\right]=+\infty\end{array}\right\}$$ Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $[-1,+\infty)$.

Γ2. Η $x^{x-1}=e^{2013}\,(\mathrm{I})$ είναι ισοδύναμη με την:

$(x-1)\ln x=2013\Rightarrow(x-1)\ln x-1=2012\Rightarrow f(x)=2012$ που από το σύνολο τιμών της f ανά διάστημα μονοτονίας έχουμε ότι παίρνει την τιμή 2012 2 φορές ακριβώς μια για $x_1\in(0,1)$ και μία για $x_2\in(1,+\infty)$ άρα η (Ι) έχει 2 ακριβώς λύσεις θετικές.

Γ3. Έστω η $h(x)=e^x\cdot f(x)-e^x\cdot 2012$ στο $[x_1,x_2]$

- Η h(x) είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$.
- Η h(x) παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2).
- $h(x_1)=e^{x_1}\left(f(x_1)-2012\right)=0=h(x_2)$

Άρα από Θεώρημα Rolle για την h(x) στο $[x_1,x_2]$ έχουμε ότι υπάρχει

$x_0\in(x_1,x_2):h'(x_0)=0$ δηλαδή $f'(x_0)+f(x_0)=2012$.

Γ4. Έχουμε από Γ1 ότι $f(x) \ge -1$ άρα $f(x)+1 \ge 0$ δηλαδή $g(x) \ge 0$.

$g(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

Οπότε θέλουμε το:

$$E\left(C_g, xx', x=e, x=1\right)=\int_1^e (f(x)+1)dx=\int_1^e (x-1)\ln x dx$$

$$=\int_1^e \left(\frac{(x-1)^2}{2}\right)' \ln x dx=\left[\frac{(x-1)^2}{2}\ln x\right]_1^e-\int_1^e \frac{(x-1)^2}{2x}dx=\frac{(e-1)^2}{2}-\int_1^e \frac{x^2-2x+1}{2x}dx$$

$$=\frac{(e-1)^2}{2}-\left[\frac{x^2}{4}-x+\frac{1}{2}\ln x\right]_1^e=\frac{(e-1)^2}{2}-\left(\frac{e^2}{4}-e+\frac{1}{2}+1\right)=\frac{e^2-3}{4}.$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1.

- Για κάθε $x>0$ είναι $f(x) \ne 0$ και συνεχής, οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο.

- Για την $g(x)=\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt-\frac{x-x^2}{e}$.

  Έχουμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με:

  $$g'(x)=f\left(x^2-x+1\right)\left(x^2-x+1\right)'-\frac{1}{e}\left(x-x^2\right)'=f\left(x^2-x+1\right)(2x-1)-\frac{1}{e}(1-2x)$$

- Επίσης $g(x) \ge 0 \Leftrightarrow g(x) \ge g(1)$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$, δηλαδή στο εσωτερικό σημείο $x_0=1$ του $(0,+\infty)$ παρουσιάζει ελάχιστο, οπότε, από Fermat προκύπτει ότι: $g'(1)=0 \Leftrightarrow f(1)-\frac{1}{e}(-1)=0 \Leftrightarrow f(1)=-\frac{1}{e}<0$,

  οπότε $f(x)<0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

- Για την $Q(x)=\int_1^x \frac{\ln t-t}{f(t)}dt$ έχουμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

  $$Q'(x)=\frac{\ln x-x}{f(x)}$$

✍ Η $z(x)=\ln x - x$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με:

$$z'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$$

$$z'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$$

x	0		1		$+\infty$
$z'(x)$		$+$	0	$-$	
$z(x)$		$\nearrow$	μ	$\searrow$	

Στο 1 παρουσιάζει μέγιστο, άρα

$z(x)\le z(1) \Leftrightarrow z(x)\le -1$, άρα $z(x)<0$

✍ Οπότε $\int_1^x \frac{\ln t - 1}{f(t)}dt + e > 0$ για κάθε $x>0$.

Τελικά $f(x)=\dfrac{\ln x - x}{\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)}$ που είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

✍ Από τα παραπάνω $\dfrac{\ln x - x}{f(x)}=\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e$.

Άρα : $\left(\dfrac{\ln x - x}{f(x)}\right)'=\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)'$

$$\left(\frac{\ln x - x}{f(x)}\right)'=\frac{\ln x - x}{f(x)}$$

Άρα : $\dfrac{\ln x - x}{f(x)}=ce^x, c\in\mathbb{R}$

✍ Για x=1 $\dfrac{-1}{\frac{-1}{e}}=ce \Leftrightarrow c=1$ οπότε

$$\frac{\ln x - x}{f(x)}=e^x \Leftrightarrow e^x f(x)=(\ln x - x) \Rightarrow f(x)=e^{-x}(\ln x - x)$$

Δ2. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\left(f(x)\right)^2\cdot ημ\dfrac{1}{f(x)}-f(x)\right]$

$u=\dfrac{1}{f(x)} \Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{u}$ με $\lim\limits_{x\to 0^+} u=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{f(x)}=0$ και

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(e^{-x}(\ln x - x)\right) = -\infty .$$

Τότε $\lim\limits_{u\to 0^+}\left(\dfrac{\eta\mu u}{u^2}-\dfrac{1}{u}\right)=\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{\eta\mu u - u}{u^2}\underset{\text{de l'Hospital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{\sigma\upsilon\nu u-1}{2u}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{\sigma\upsilon\nu u-1}{u}=\dfrac{1}{2}\cdot 0=0$

Δ3.

- $\ln x \le x-1, x>0$
- $F'(x)=f(x) \quad F''(x)=f'(x)$
- $f'(x)=\left(e^{-x}(\ln x - x)\right)'=e^{-x}(-1)(\ln x - x)+e^{-x}\left(\dfrac{1}{x}-1\right)$

  $=e^{-x}\left(-\ln x + x + \dfrac{1}{x}-1\right)=e^{-x}\left((-\ln x + x - 1)+\dfrac{1}{x}\right)>0$

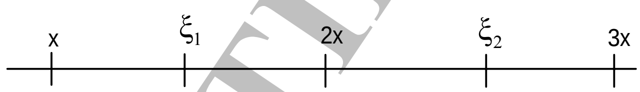
  Άρα $F''(x)>0 \Rightarrow F$ κυρτή.
- $x<2x<3x$

  Από Θ. Μ . Τ. έχουμε F συνεχής στα $[x,2x]$ και $[2x,3x]$

  F παραγωγίσιμη στα $(x,2x)$ και $(2x,3x)$
- Θ.Μ.Τ.

  $\xi_1 \in (x,2x) \qquad F'(\xi_1)=\dfrac{F(2x)-F(x)}{x}$

  $\xi_2 \in (2x,3x) \qquad F'(\xi_2)=\dfrac{F(3x)-F(2x)}{x}$



$$\xi_1<\xi_2 \overset{F'\nearrow}{\Rightarrow} F'(\xi_1)<F'(\xi_2)\Rightarrow \frac{F(2x)-F(x)}{x}<\frac{F(3x)-F(2x)}{x}$$

- x>0

  $F(2x)-F(x)<F(3x)-F(2x)\Rightarrow F(x)+F(3x)>2F(2x)$

Δ4.

- $\xi \in (\beta, 2\beta)$

  $F(\beta) + F(3\beta) = 2F(\xi)$

- $h(x) = F(\beta) + F(3\beta) - 2F(x)$ με $F'(x) = f(x) < 0$, οπότε η F είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

- $h(\beta) = F(\beta) + F(3\beta) - 2F(\beta) = F(3\beta) - F(\beta) \overset{\beta<3\beta}{<} 0$

  $h(2\beta) = F(\beta) + F(3\beta) - 2F(2\beta) > 0$ (λόγω του **Δ3**)

- $h(\beta) \cdot h(2\beta) < 0$

- Από Θεώρημα Bolzano υπάρχει $\xi \in (\beta, 2\beta)$ ώστε :

  $h(\xi) = F(\beta) + F(3\beta) - 2F(\xi) = 0 \Rightarrow 2F(\xi) = F(\beta) + F(3\beta)$

  $h'(x) = -2F'(x) = -2f(x) > 0$, άρα η h είναι γνησίως αύξουσα, οπότε το ξ είναι μοναδικό.

Επιμέλεια: Κανακάκης Γεώργιος
Μακρίδης Ηλίας
Μπαμπέ Αφροδίτη
Οικονομόπουλος Αναστάσιος
Πεφάνης Κωνσταντίνος
Ρούτης Κωνσταντίνος