ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΤΕΤΑΡΤΗ 18 ΜΑΪΟΥ 2016 – ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 262.

Α2. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 141.

Α3. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 246

Α4.

α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Λάθος

δ) Σωστό

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως ρητή.

- $f'(x)=\frac{2x(x^2+1)-2x\cdot x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}\ (1)$
- $f'(x)=0\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\frac{2x}{(x^2+1)^2}=0\Leftrightarrow x=0$ είναι πιθανό ακρότατο

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

- Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$
- Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$
- Στο $x_0=0$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο με τιμή $f(0)=0$

B2.

Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

- $f''(x)=\frac{2(x^2+1)^2-2x\cdot 2(x^2+1)^2\cdot 2x}{(x^2+1)^4}=\frac{2(x^2+1)\left[(x^2+1)-4x^2\right]}{(x^2+1)^4}=$

$$=\frac{2(-3x^2+1)}{(x^2+1)^3}=2\frac{-3x^2+1}{(x^2+1)^3}\ (1)$$

- $f''(x)=0\overset{(1)}{\Leftrightarrow}2(-3x^2+1)=0\Leftrightarrow 3x^2=1\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ είναι πιθανά σημεία καμπής

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	0	$-$	
f							
			σ.κ.		σ.κ.		

- Επομένως η συνάρτηση f είναι κοίλη στα $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ και $\left[\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$

  & κυρτή στο $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$
- $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{1}{4}$
- $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{1}{4}$
- Με σημεία καμπής τα $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{4}\right)$ και $B\left(\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{4}\right)$

B3.

i. Κατακόρυφες δεν έχει διότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

ii. Πλάγιες – οριζόντιες ασύμπτωτες

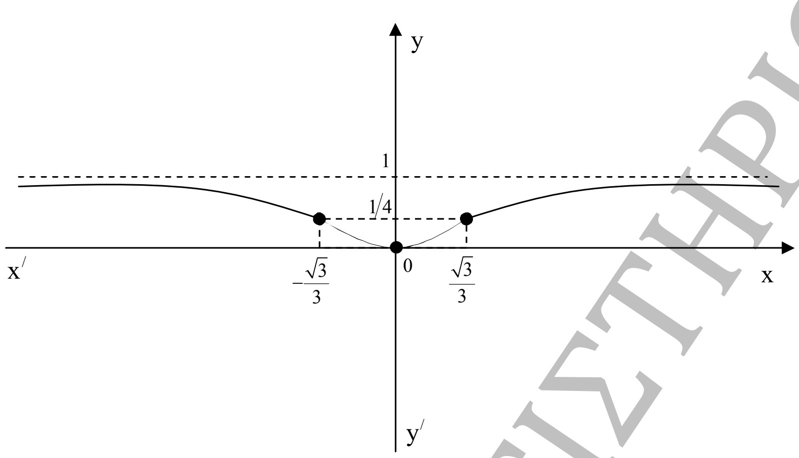
$y=\lambda x+\beta$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, άρα $\lambda=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1$, άρα $\beta=1$

Ομοίως και για το $-\infty$.

Άρα έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y=1$ στο $+\infty$ και στο $-\infty$

Β4.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Η $e^{x^2}-x^2-1=0$ έχει μοναδική λύση την $x=0$ διότι $e^0-0-1=0 \Leftrightarrow 1-1=0$

Παίρνω:

$$g(x)=e^x-x-1$$
$$g'(x)=e^x-1 \qquad g'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Άρα: $g(x)\ge g(0)\Rightarrow g(x)\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$$x<0 \overset{\substack{g:\text{γνησίως}\\ \text{φθίνουσα}}}{\Rightarrow} g(x)>g(0)\Rightarrow g(x)>0\Rightarrow g(x)\neq 0$$ στο $(-\infty,0)$

$0 < x \overset{\substack{g:\text{γνησίως} \\ \text{αύξουσα}}}{\Rightarrow} g(0) < g(x) \Rightarrow 0 < g(x) \Rightarrow g(x) \neq 0$ στο $(0,+\infty)$

Άρα η $x = 0$ είναι μοναδική ρίζα.

Θέτω όπου x το x^2 οπότε έχω:

$g(x^2) = e^{x^2} - x^2 - 1 \qquad g(0) = 0$

$g(x^2) = g(0) \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ είναι μοναδική ρίζα

Γ2.

$|f(x)| = \left|e^{x^2} - x^2 - 1\right|$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \left|e^{x^2} - x^2 - 1\right| = 0 \Leftrightarrow e^{x^2} - x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Η f είναι συνεχής στα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (-\infty,0)$ και για κάθε $x \in (0,+\infty)$. Άρα η f διατηρεί πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

Έχουμε $e^{x^2} - x^2 - 1 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ από το Γ1.

Αν $f(x) > 0$ στα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

$f(x) = \left|e^{x^2} - x^2 - 1\right|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$e^{x^2} - x^2 - 1 \geq 0$

$f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Αν $f(x)<0$ στα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ έχουμε $f(x)=-\left|e^{x^2}-x^2-1\right|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

  $e^{x^2}-x^2-1\geq 0$

  $f(x)=-e^{x^2}+x^2+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

- Αν $f(x)>0$ στο $(-\infty,0)$ και $f(x)<0$ στο $(0,+\infty)$ έχουμε:

$$f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1 & x\leq 0 \\ -e^{x^2}+x^2+1 & x>0 \end{cases}$$

  - Αν $f(x)<0$ στο $(-\infty,0)$ και $f(x)>0$ στο $(0,+\infty)$ έχουμε:

$$f(x)=\begin{cases} -e^{x^2}+x^2+1 & x\leq 0 \\ e^{x^2}-x^2-1 & x>0 \end{cases}$$

Γ3.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$$f'(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)'=e^{x^2}2x-2x$$

$$f''(x)=e^{x^2}(2x)^2+2e^{x^2}-2$$
$$=4x^2e^{x^2}+2e^{x^2}-2$$

$$=4x^2e^{x^2}+2\left(e^{x^2}-1\right)>0$$ για $x\neq 0$ ως άθροισμα θετικών.

(Για $x\neq 0$ έχουμε $x^2>0\Rightarrow e^{x^2}>e^0\Rightarrow e^{x^2}>1\Rightarrow e^{x^2}-1>0$)

Οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,0]$ και $[0,+\infty]$.

Η f' είναι συνεχής στο 0 άρα f' γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε f κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Γ4. Αν $g(x)=f(x+3)-f(x)$ τότε $g'(x)=f'(x+3)-f'(x)>0$ αφού f' γνησίως αύξουσα (από Γ3) οπότε g γνησίως αύξουσα άρα $g:"1-1"$ στο $[0,+\infty)$.

$$f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)=f(x+3)-f(x)\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow g(|\eta\mu x|)=g(x)\overset{g:"1-1"}{\Leftrightarrow}|\eta\mu x|=x$ που ισχύει μόνο για $x=0$ (εφαρμογή σχολικού βιβλίου σελ. 170).

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Θέτω $g(x)=\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}\Leftrightarrow f(x)=g(x)\cdot\eta\mu x$. Η f συνεχής στο 0 οπότε:

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}(g(x)\cdot\eta\mu x)=0$$

- $\int_0^\pi (f(x)+f''(x))\eta\mu x dx=\pi\Leftrightarrow\int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx+\int_0^\pi f''(x)\eta\mu x dx=\pi\Leftrightarrow$

  $\int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx+\left[f'(x)\eta\mu x\right]_0^\pi-\int_0^\pi f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx=\pi\Leftrightarrow$

  $\int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx+\left[f'(x)\eta\mu x\right]_0^\pi-\left[f(x)\sigma\upsilon\nu x\right]_0^\pi-\int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx=\pi\Leftrightarrow$

  $0-f(\pi)\sigma\upsilon\nu\pi+f(0)\sigma\upsilon\nu 0=\pi\Leftrightarrow f(\pi)+0=\pi\Leftrightarrow f(\pi)=\pi$

- $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\left(g(x)\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=1\cdot 1=1$ άρα $f'(0)=1$.

Δ2.

α) Αν υπάρχει $\rho\in\mathbb{R}$ όπου η f παρουσιάζει ακρότατο τότε από Θεώρημα Fermat έπεται ότι $f'(\rho)=0$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ $\left(e^{f(x)}+x\right)'=\left(f\left(f(x)\right)+e^x\right)' \Leftrightarrow e^{f(x)}f'(x)+1=f'\left(f(x)\right)f'(x)+e^x$.

Για $x=\rho$

$e^{f(\rho)}f'(\rho)+1=f'\left(f(\rho)\right)f'(\rho)+e^\rho \Leftrightarrow 0+1=0+e^\rho \Leftrightarrow e^\rho=1 \Leftrightarrow \rho=0$

οπότε $f'(0)=0$

Άτοπο αφού είναι $f'(0)=1$

β) Η f' συνεχής στο $\mathbb{R}$ (αφού υπάρχει η f'') και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (από το α). Έπεται ότι η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και επειδή $f'(0)=1>0$. Έπεται ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ3.

$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

- Η f γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα $f(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$ από τα παραπάνω προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (άρα και $f(x) > 0$ σε διάστημα $(\alpha, +\infty)$).

-

$$|\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x| \le |\eta\mu x| + |\sigma\upsilon\nu x| \le 2$$

$$\left|\frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right| \le \frac{2}{|f(x)|}$$

-

$$\left|\frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right| \le \frac{2}{f(x)} \Leftrightarrow -\frac{2}{f(x)} \le \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \le \frac{2}{f(x)}$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{f(x)}\right) = 0, \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{f(x)} = 0$ οπότε από κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} = 0$.

Δ4. Θέτω $u = \ln x$ οπότε $du = \frac{1}{x}dx$.

- $\begin{cases} \text{Για } x = 1 \text{ είναι } u = 0 \\ \text{Για } x = e^{\pi} \text{ είναι } u = \pi \end{cases}$
- Έτσι $\int_0^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x}dx = \int_0^{\pi} f(u)du = \int_0^{\pi} f(x)dx$.
- Η f γνησίως αύξουσα στο [0,π] $f(0) = 0, f(\pi) = \pi$ και για $0 < x < \pi$ έπεται

$$f(0) < f(x) < f(\pi) \Leftrightarrow 0 < f(x) < \pi \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ \text{και} \\ \pi - f(x) > 0 \end{cases}$$

- Έτσι $\int_0^{\pi} f(x)dx > 0$ και $\int_0^{\pi} (\pi - f(x))dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^{\pi} \pi dx - \int_0^{\pi} f(x)dx > 0 \Leftrightarrow$
- $\pi^2 > \int_0^{\pi} f(x)dx$ από τα παραπάνω προκύπτει $0 < \int_0^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x}dx < \pi^2$

__Επιμέλεια__: *Κανακάκης Γεώργιος*

Μακρίδης Ηλίας

Οικονομόπουλος Αναστάσιος

Πεφάνης Κωνσταντίνος

Ρούτης Κωνσταντίνος