ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018 – ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 99.

Α2.

α. Ψευδής

β. Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x>0\\ x, & x\le 0\end{cases}$ είναι ’1-1’, αλλά όχι γνησίως μονότονη.

Α3. Θεωρία, βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 216.

Α4.

α. Λάθος

β. Λάθος

γ. Σωστό

δ. Σωστό

ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$, ως διαφορά των συνεχών συναρτήσεων $y=x$ και $y=\dfrac{4}{x^2}$.

Για κάθε $x\neq 0$ είναι: $f'(x)=1+\dfrac{8}{x^3}=\dfrac{x^3+8}{x^3}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^3=-8 \Leftrightarrow x=-2$

x	$-\infty$ -2	-2 0	0 $+\infty$
x^3	$-$	$-$	$+$
x^3+8	$-$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	↗	↘	↗

-3
τ.μ.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-2]$ και στο $(0,+\infty)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2,0)$

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο -2 το $f(-2)=-3$

Β2.

Για κάθε $x \neq 0$ είναι: $f''(x) = -\dfrac{24}{x^4} < 0$.

Άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$.

Δεν έχει σημεία καμπής.

Β3.

- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(x - \dfrac{4}{x^2} \right) = -\infty$

  Άρα η $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x - \dfrac{4}{x^2}}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \dfrac{4}{x^3} \right) = 1$

  $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) - x \right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x - \dfrac{4}{x^2} - x \right) = \lim\limits_{x \to -\infty} - \dfrac{4}{x^2} = 0$

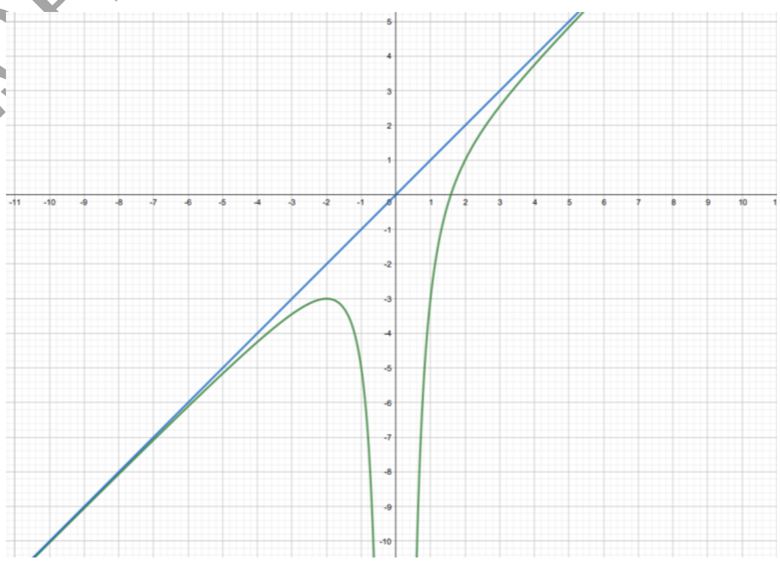
  Άρα η $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - \dfrac{4}{x^2}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{4}{x^3} \right) = 1$

  $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - x \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - \dfrac{4}{x^2} - x \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} - \dfrac{4}{x^2} = 0$

  Άρα η $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Β4.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

<u>Εύρεση εμβαδού τετραγώνου</u>

$$\text{E}_{\text{ΤΕΤΡ}}=\frac{x^2}{16}$$

<u>Εύρεση ακτίνας</u>

$$L=2\pi R \Leftrightarrow 8-x=2\pi R \Leftrightarrow R=\frac{8-x}{2\pi}\ (1)$$

<u>Εύρεση εμβαδού κύκλου</u>

$$\text{E}_{ΚΥΚΛΟΥ}=\pi R^2 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \text{E}_{ΚΥΚΛΟΥ}=\pi\left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2=\pi\frac{(8-x)^2}{4\pi^2}=\frac{(8-x)^2}{4\pi}$$

<u>Εύρεση συνολικού εμβαδού</u>

$$\text{E}_{\text{ΟΛ}}=\text{E}_{\text{ΤΕΤΡ}}+\text{E}_{ΚΥΚΛΟΥ}=\frac{x^2}{16}+\frac{(8-x)^2}{4\pi}=\frac{\pi x^2+4(8-x)^2}{16\pi}=\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}\ ,\ x\in(0,8)$$

ΑΡΑ $\text{E}(x)=\dfrac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}\ ,\ x\in(0,8)$

Γ2.

$$\text{E}'(x)=\frac{1}{16\pi}\cdot\left[(\pi+4)x^2-64x+256\right]'=\frac{1}{16\pi}\cdot\left[2(\pi+4)x-64\right]=\frac{(\pi+4)x}{8\pi}-\frac{4}{\pi}$$

$$\text{E}'(x)=0\Leftrightarrow\frac{(\pi+4)x}{8\pi}-\frac{4}{\pi}=0\Leftrightarrow x=\frac{32}{\pi+4}$$

$$\text{E}'(x)>0\Leftrightarrow\frac{(\pi+4)x}{8\pi}-\frac{4}{\pi}>0\Leftrightarrow x>\frac{32}{\pi+4}$$

x	0		$\frac{32}{\pi+4}$		8
E’	‖	-	0	+	‖
E	‖	↘		↗	‖

Η Ε(x) συνεχής στο $\left(0,\dfrac{32}{\pi+4}\right]$ με Ε'(x) < 0 στο $\left(0,\dfrac{32}{\pi+4}\right)$ άρα Ε γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\dfrac{32}{\pi+4}\right]$

Η Ε(x) συνεχής στο $\left[\dfrac{32}{\pi+4},8\right)$ με Ε'(x) > 0 στο $\left(\dfrac{32}{\pi+4},8\right)$ άρα Ε γνησίως αύξουσα στο $\left[\dfrac{32}{\pi+4},8\right)$

Για $x=\dfrac{32}{\pi+4}$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $\mathrm{E}\left(\dfrac{32}{\pi+4}\right)$

<u>Εύρεση διαμέτρου</u>

$$R=\frac{8-x}{2\pi}\Leftrightarrow 2R=\frac{8-x}{\pi}\Leftrightarrow \delta=\frac{8-x}{\pi}$$

για $x=\dfrac{32}{\pi+4}$ έχω $\delta=\dfrac{8-\dfrac{32}{\pi+4}}{\pi}=\dfrac{\dfrac{8\pi+32}{\pi+4}-\dfrac{32}{\pi+4}}{\pi}=\dfrac{8\pi}{(\pi+4)\pi}=\dfrac{8}{\pi+4}$

<u>Εύρεση πλευράς τετραγώνου</u>

$$\frac{x}{4}=\frac{\frac{32}{\pi+4}}{4}=\frac{8}{\pi+4}$$

Άρα η διάμετρος είναι ίση με την πλευρά του τετραγώνου.

Γ3.

<u>Εύρεση συνόλου τιμών στο</u> $\Delta_1 = \left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]$

Η Ε είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ_1

$\mathrm{E}(\Delta_1) = \left[\mathrm{E}\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{E}(x)\right) = \left(\frac{16}{\pi+4}, \frac{16}{\pi}\right)$ διότι

- $$\mathrm{E}\left(\frac{32}{\pi+4}\right) = \frac{(\pi+4)\left(\frac{32}{\pi+4}\right)^2 - 64\frac{32}{\pi+4} + 256}{16\pi} = \frac{\frac{32}{\pi+4}^{2} - 64\frac{32}{\pi+4} + 256}{16\pi}$$
$$= \frac{-\frac{1024}{\pi+4} + 256}{16\pi} = \frac{16}{\pi+4} < 4$$
- $$\lim_{x\to 0^+}\mathrm{E}(x) = \frac{16}{\pi} > 5$$

<u>Εύρεση συνόλου τιμών στο</u> $\Delta_2 = \left[\frac{32}{\pi+4}, 8\right)$

Η Ε είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_2

$\mathrm{E}(\Delta_2) = \left[\mathrm{E}\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim\limits_{x\to 8^-}\mathrm{E}(x)\right) = \left[\frac{16}{\pi+4}, 4\right)$ διότι

- $$\mathrm{E}\left(\frac{32}{\pi+4}\right) = \frac{(\pi+4)\left(\frac{32}{\pi+4}\right)^2 - 64\frac{32}{\pi+4} + 256}{16\pi} = \frac{\frac{32}{\pi+4}^{2} - 64\frac{32}{\pi+4} + 256}{16\pi}$$
$$= \frac{-\frac{1024}{\pi+4} + 256}{16\pi} = \frac{16}{\pi+4} < 4$$
- $$\lim_{x\to 8^-}\mathrm{E}(x) = 4$$

Το 5 ανήκει στο $\mathrm{E}(\Delta_1) = \left(\frac{16}{\pi+4}, \frac{16}{\pi}\right)$ κι όχι στο $\mathrm{E}(\Delta_2) = \left[\frac{16}{\pi+4}, 4\right)$ άρα υπάρχει μοναδικός τρόπος να κοπεί το σύρμα.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$f'(x)=2e^{x-a}-2x \;\;,\;\; f''(x)=2e^{x-a}-2$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 2e^{x-a}-2=0 \Leftrightarrow x=a$

$f''(x)>0 \Leftrightarrow 2e^{x-a}-2>0 \Leftrightarrow x>a$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f’’	-	0	+
f			

Η f συνεχής στο $(-\infty,\alpha]$ και f’’ (x) <0 στο $(-\infty,\alpha)$ άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty,\alpha]$

Η f συνεχής στο $[\alpha,+\infty)$ και f’’ (x) >0 στο $(\alpha,+\infty)$ άρα η f είναι κυρτή στο $[\alpha,+\infty)$

Ισχύει ότι $f''(\alpha)=0$ και αλλάζει η κυρτότητα γύρω από το α.

Το σημείο $(a, f(a))$ είναι το μοναδικό σημείο καμπής.

Δ2.

<u>Εύρεση συνόλου τιμών στο</u> $\Delta_1=(-\infty,\alpha]$

Η f’ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ_1

$f'(\Delta_1)=\left[f'(a), \lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)\right)=\left(2(1-a),+\infty\right)$ διότι

- $f'(a)=2(1-a)<0$ αφού $\alpha>1$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=+\infty$

<u>Εύρεση συνόλου τιμών στο</u> $\Delta_2=(\alpha,+\infty)$

Η f’ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_2

$f'(\Delta_2)=\left(\lim\limits_{x\to\alpha^+} f'(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)\right)=\left(2(1-a),+\infty\right)$ διότι

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2e^{x-a}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2e^{x-a}\left(1-\dfrac{x}{e^{x-a}}\right)=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x-a}} \overset{D.L.H}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{x-a}}=0$

Επειδή $0\in f'(\Delta_1)$ τότε υπάρχει $x_1\in\Delta_1$ ώστε $f'(x_1)=0$

(x_1 μοναδικό, αφού f' γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,a]$)

Επειδή $0\in f'(\Delta_2)$ τότε υπάρχει $x_2\in\Delta_2$ ώστε $f'(x_2)=0$

(x_2 μοναδικό, αφού f' γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,+\infty)$)

$$x<x_1 \overset{f':\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(x_1) \Leftrightarrow f'(x)>0$$

$$x_1<x<a \overset{f':\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x_1)>f'(x) \Leftrightarrow f'(x)<0$$

$$x>x_2 \overset{f':\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(x_2) \Leftrightarrow f'(x)>0$$

$$a<x<x_2 \overset{f':\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(x_2) \Leftrightarrow f'(x)<0$$

x	$-\infty$	x_1 α	x_2 $+\infty$
f ’	+	-	+
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Η f συνεχής στο $(-\infty,x_1]$ και f ’ (x) > 0 στο $(-\infty,x_1)$ άρα f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,x_1]$

Η f συνεχής στο $[x_1,x_2]$ και f ’ (x) < 0 στο (x_1,x_2) άρα f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_1,x_2]$

Η f συνεχής στο $[x_2,-\infty)$ και f ’ (x) > 0 στο $(x_2,-\infty)$ άρα f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_2,-\infty)$

Επίσης $f'(x_1)=0$, $f'(x_2)=0$ κι επειδή αλλάζει η μονοτονία της f εκατέρωθεν των x_1,x_2 άρα x_1 θέση τοπικού μεγίστου και x_2 θέση τοπικού ελαχίστου.

Δ3.

Είναι $f'(1) = 2e^{1-\alpha} - 2 = 2\left(e^{-\alpha} - 1\right) < 0$

Αφού

- $\alpha > 1 \Leftrightarrow -\alpha < -1 \Leftrightarrow 1 - \alpha < 0$
- $e^{1-\alpha} < 1 \Leftrightarrow e^{1-\alpha} - 1 < 0$

Επειδή $f'(x) < 0$ στο (x_1, x_2).

Έπεται ότι $1 \in (x_1, x_2)$ και επειδή $\alpha > 1$ έπεται ότι: $x_1 < 1 < \alpha < x_2$.

Στο (x_1, x_2) η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα '1-1'

Οπότε η $f(x) = f(1)$ έχει μοναδική λύση την $x = 1 \notin (\alpha, x_2)$

Δ4.

Για $\alpha = 2$ είναι $f(x) = 2e^{x-2} - x^2$ και $f'(x) = 2e^{x-2} - 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $(2, f(2))$ είναι η:

$\varepsilon:\ y - f(2) = f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y = -2x + 2$

Η συνάρτηση f στο $[2,3]$ είναι κυρτή από το ερώτημα (Δ1), άρα η C_f είναι πάνω από την (ε) εκτός του σημείου $(2, f(2))$ στο διάστημα $[2,3]$.

Άρα $f(x) \ge -2x + 2$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 2$.

Αφού $\sqrt{x-2} \ge 0$ για $x \in [2,3]$ είναι:

$f(x)\sqrt{x-2} \ge (-2x+2)\sqrt{x-2}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 2$.

Οπότε $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx > \int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}\,dx$

$I = \int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}\,dx = -2\int_2^3 x\sqrt{x-2}\,dx + 2\int_2^3 \sqrt{x-2}\,dx$, με

- $\int_2^3 x\sqrt{x-2}dx \overset{u=x-2}{=} \int_0^1 (u+2)\sqrt{u}du = \int_0^1 u\sqrt{u}du + 2\int_0^1 \sqrt{u}du =$

  $\int_0^1 u^{\frac{3}{2}}du + 2\int_0^1 u^{\frac{1}{2}}du = \left[\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 + 2\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{4}{3} = \frac{26}{15}$

- $\int_2^3 \sqrt{x-2}dx = \int_2^3 (x-2)^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{2}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}}\right]_2^3 = \frac{2}{3}$

Άρα $I = -2\frac{26}{15} + 2\frac{2}{3} = -\frac{52}{15} + \frac{4}{3} = -\frac{32}{15}$

Τελικά $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx > -\frac{32}{15}$

Επιμέλεια: Βασιλάτος Κοσμάς

Καναβός Φώτης

Κανακάκης Γιώργος

Κατωπόδης Σπύρος

Μακρίδης Ηλίας

Μπαλτσαβιάς Βενέδικτος

Οικονομόπουλος Αναστάσιος

Ρούτης Κωνσταντίνιος