ΑΛΓΕΒΡΑ

«ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ & ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΤΟΥΣ»

Α. Ερωτήσεις Σωστού- Λάθος

α. Λάθος
β. Λάθος
γ. Σωστό
δ. Λάθος
ε. Σωστό
στ. Σωστό
ζ. Σωστό
η. Σωστό
θ. Σωστό

Β. Θέματα ανάπτυξης

ΑΣΚΗΣΗ 1

Α) **i.** 7 **ii.**4
Β) **i.** 7,4 **ii.** 0,2
Γ) **i.** 0,05 **ii.** 1,07

ΑΣΚΗΣΗ 2

α. 3
β. -5
γ. -4
δ. $-\frac{1}{10}$
ε. -4
στ. -14
ζ. 6
η. -16
θ. 64
ι. -72
ια. $\frac{6}{7}$
ιβ. $-\frac{15}{32}$

ΑΣΚΗΣΗ 3

α. $2-\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}-1\right):\left(-\frac{1}{6}\right)=\ldots=2-1=1.$

β. $1-\frac{\frac{2}{6}-1}{3}=1-\frac{-\frac{4}{6}}{3}=\ldots=\frac{11}{9}.$

ΑΣΚΗΣΗ 4

i. $(-2)\cdot(-1)-(-3)(+4)-(-1)=+2-(-12)+1=15.$

ii. $5\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(+\frac{15}{2}\right)=-\frac{15}{4}+\frac{15}{4}=0.$

iii. $\left(\frac{2}{3}-3+\frac{7}{2}\right):\left(-\frac{1}{2}+5\right)=\left(\frac{4}{6}-\frac{18}{6}+\frac{21}{6}\right):\left(-\frac{1}{2}+\frac{10}{2}\right)=\ldots=\frac{7}{27}.$

iv.

$$\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{7}{6}}{3-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)}\cdot\left[\frac{\frac{1}{3}-\frac{2}{1+0,5}}{4-\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{1-0,5}\right)}\cdot\left(5^2+3^2\right)\right]=$$

$$\frac{\frac{4}{6}-\frac{3}{6}+\frac{7}{6}}{\frac{18}{6}-\frac{3}{6}+\frac{2}{6}}\cdot\left[\frac{\frac{1}{3}-\frac{2}{\frac{3}{2}}}{4-\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{\frac{1}{2}}\right)}\cdot(25+9)\right]=$$

$$=\ldots=\frac{8}{17}\cdot\frac{-3}{29}\cdot 34=-\frac{14}{29}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

2	3	5	2	5	3

ΑΣΚΗΣΗ 6

$$K=\frac{12x+\frac{4}{y}}{18x-\frac{1}{y}}=\frac{\frac{12xy+4}{y}}{\frac{18xy-1}{y}}=\frac{2+4}{3-1}=\frac{6}{2}=3.$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

$$3(2\alpha-3\beta)-\left[-3a+\left(a+\beta-1\right)\right]=6a-9\beta-4\left(-2a+2\beta-1\right)=$$

$$6a-9\beta+8a-8\beta+4=14\alpha-17\beta+4$$

$$\text{Για } \alpha=\frac{-1}{2} \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \beta=0,001$$

$$14\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-17\cdot 0,001+4=-3,017$$

ΑΣΚΗΣΗ 8

$$K=\frac{2\alpha+\beta+\gamma}{\beta-\gamma}=\frac{(\alpha+\beta)+(\alpha+\gamma)}{\beta-\gamma}=$$

$$\frac{3021+3018}{(3021-\alpha)+(3018-\alpha)}=\frac{6039}{3}=2013$$

ΑΣΚΗΣΗ 9

$$\lambda=\left(-\frac{20}{3}\right):\left(-\frac{5}{6}\right)-\left(-\frac{42}{8}\right):\left(-\frac{7}{4}\right)=\ldots=8-3=5.$$

$$\mu=\frac{2}{2-\frac{2}{\frac{4}{3}}}=\frac{2}{2-\frac{6}{4}}=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4.$$

$$\nu=-\left\{-\left[-(-1)\right]-\left[-(-2)\right]\right\}=-(-1-2)=3.$$

$\dfrac{\alpha}{\lambda}=\dfrac{\beta}{\mu}=\dfrac{\gamma}{\nu}\Leftrightarrow\dfrac{\alpha}{5}=\dfrac{\beta}{4}=\dfrac{\gamma}{3}$ από τις ιδιότητες των αναλογιών έχουμε:

$$\begin{cases}\dfrac{\alpha}{5}=\dfrac{\alpha+\beta}{5+4}\Leftrightarrow\dfrac{\alpha}{5}=\dfrac{36}{9}\Leftrightarrow\alpha=20\\ \dfrac{\beta}{4}=\dfrac{\alpha+\beta}{5+4}\Leftrightarrow\dfrac{\beta}{4}=4\Leftrightarrow\beta=16\\ \dfrac{\gamma}{3}=\dfrac{\alpha+\beta}{5+4}\Leftrightarrow\dfrac{\gamma}{3}=4\Leftrightarrow\gamma=12\end{cases}$$

«ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ»

Α. Ερωτήσεις Σωστού – Λάθος

α. Λάθος	**δ.** Σωστό	**ζ.** Σωστό
β. Λάθος	**ε.** Λάθος	**η.** Σωστό
γ. Σωστό	**στ.** Σωστό	**θ.** Σωστό

Β. Θέματα ανάπτυξης

ΑΣΚΗΣΗ 1

α. $(-2)^3-\left[-4^0+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}+3\cdot(-4)\right]:19+\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}\left[\left(0,5^{-1}\right)^2-2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^{-3}\right]=$

$-8-\left[-1+2\cdot(-2)^4+(-12)\right]:19+\left(-\frac{3}{2}\right)^2\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}-3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^3\right]=\dots$

$-8-1+11=2$.

β. Διακρίνω περιπτώσεις, για ν: άρτιος

$(-1)^{\nu}+(-1)^{\nu+1}+(-1)^{\nu+2}+(-1)^{\nu+3}=1-1+1-1=0$. Ομοίως, για ν: περιττός.

γ. $\left(-\frac{2}{3}\right)^{2006}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-2007}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-4000}\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)^{-6}=$

$\left(-\frac{2}{3}\right)^{2006}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2007}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-4000}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-12}=$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{4013-4012}=\frac{2}{3}$

δ. $\left[(-2)^3+\left(-\frac{1}{5}\right)^{-2}-\left(\frac{\frac{2}{5}}{2}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}\right]^{10000-2007}=$

$\left[(-8)+(-5)^2-\left(\frac{5}{4}\right)^2\cdot 2^5+2^5\right]^{10000-2007}=\dots=-1$

ΑΣΚΗΣΗ 2

α. $6,53\cdot 10^6$	**β.** $7,14\cdot 10^{-4}$	**γ.** $15,6\cdot 10^{-4}$

ΑΣΚΗΣΗ 3

$$\mathrm{B}=16^{23}\cdot 5^{89}=\left(2^4\right)^{23}\cdot 5^{89}=2^{92}\cdot 5^{89}=2^3\cdot\left(2^{89}\cdot 5^{89}\right)=2^3\cdot 10^{89}=8\cdot 10^{89}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

$$\frac{6^4}{3^4}-(2^{10})^0+0,3^3\cdot 10^3+\frac{7^{10}}{7^8}=2^4-2^0+3^3+7^2=16-1+27+49=91.$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Η σωστή απάντηση είναι το γ.

ΑΣΚΗΣΗ 6

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^4+\left(-\frac{3}{2}\right)^4-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{16}+\frac{81}{16}-2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{4}=\frac{1}{16}+\frac{81}{16}-\frac{18}{16}=\frac{64}{16}=4.$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

$$A=\left(\frac{x^3}{y^3}+\frac{1}{3}\right):\left(\frac{x}{y}\right)^3=\frac{3x^3+y^3}{3y^3}\cdot\frac{y^3}{x^3}=\frac{3\cdot\left(3^{-3}\right)^3+3^{-4}}{3\cdot(3^{-3})^3}=\frac{3^{-8}+3^{-4}}{3^{-8}}=1+\frac{3^{-4}}{3^{-8}}=1+3^4=82$$

$$B=\frac{243x^2+81y^2}{y}=\frac{3^5\cdot 3^{-6}+3^4\cdot 3^{-8}}{3^{-4}}=\frac{3^{-1}+3^{-4}}{3^{-4}}=\frac{\frac{3^3+1}{3^4}}{\frac{1}{3^4}}=28$$

$$\Gamma=x^{-1}+y^{-1}=3^3+3^4=27+81=108.$$

ΑΣΚΗΣΗ 8

$$\mathrm{A}=\left(\frac{\mathrm{x}^3}{\mathrm{y}^3}+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}}\right)^3+\frac{81\mathrm{x}^2+27\mathrm{y}}{\mathrm{y}}=\frac{3\mathrm{x}^3+\mathrm{y}^2}{3\mathrm{y}^3}\cdot\frac{\mathrm{y}^3}{\mathrm{x}^3}+\frac{81\mathrm{x}^2+27\mathrm{y}}{\mathrm{y}}=\ldots=36+54=90$$

ΑΣΚΗΣΗ 9

α. $3^{16}=3^x\cdot 3^{4x+1}\Leftrightarrow 16=5x+1\Leftrightarrow x=3$

β. $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}\cdot 5^x=\left(5^3\right)^2\Leftrightarrow 5^3\cdot 5^x=5^6\Leftrightarrow 3+x=6\Leftrightarrow x=3$

γ. $(-3)^{x+2}\cdot\left(-3^{-2}\right)^x=-3^3\Leftrightarrow -3^{x+2-2x}=-3^3\Leftrightarrow -x+2=3\Leftrightarrow x=-1$

δ. $8^{-x+3}=8^0\Leftrightarrow x=3$

«ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ»

Α. Ερωτήσεις Σωστού- Λάθος

α. Σωστό
β. Λάθος
γ. Σωστό
δ. Σωστό
ε. Σωστό
στ. Λάθος
ζ. Λάθος
η. Σωστό
θ. Σωστό
ι. Σωστό

Β. Θέματα ανάπτυξης

ΑΣΚΗΣΗ 1

$$\sqrt{1+\sqrt{9}}-1-\sqrt{9}=\sqrt{1+3}-1-3=\sqrt{4}-4=2-4=-2$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

$$\sqrt{41-\sqrt{29-\sqrt{19-\sqrt{9}}}}-\left|1-\sqrt{2}\right|\left(\sqrt{2}+1\right)-\sqrt{21+\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{4}}}}=$$

$$\sqrt{41-\sqrt{29-\sqrt{19-3}}}-\left|1-\sqrt{2}\right|\left(\sqrt{2}+1\right)-\sqrt{21+\sqrt{13+\sqrt{7+2}}}=$$

$$\sqrt{41-\sqrt{29-\sqrt{16}}}-\left|1-\sqrt{2}\right|\left(\sqrt{2}+1\right)-\sqrt{21+\sqrt{13+\sqrt{9}}}=\ldots=6-\left(\sqrt{2}^{2}-1\right)-5=6-1-5=0$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

$\mathrm{K}=\dfrac{x^2-y^2}{x+y}=\dfrac{(x-y)(x+y)}{x+y}=x-y$, όπου για $x=1-\sqrt{5}$ και $y=2+\sqrt{5}$ έχουμε:

$$1-\sqrt{5}-\left(2+\sqrt{5}\right)=-1-\sqrt{5}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

α. $\sqrt{144}-\sqrt{256}-\sqrt{625}=12-16-25=-29$

β. $\sqrt{8}-\sqrt{200}-\sqrt{18}=2\sqrt{2}-10\sqrt{2}-3\sqrt{2}=-11\sqrt{2}$

γ. $\sqrt{32}-\sqrt{300}-\sqrt{48}+\sqrt{200}=4\sqrt{2}-10\sqrt{3}-4\sqrt{3}+10\sqrt{2}=14\sqrt{2}-14\sqrt{3}$

δ. $3\sqrt{12}-2\sqrt{27}+4\sqrt{75}-\sqrt{48}+2\sqrt{80}+3\sqrt{20}=\ldots=16\sqrt{3}+20\sqrt{5}$

ε. $\dfrac{\sqrt{20}-2\sqrt{8}+3\sqrt{12}}{\sqrt{45}-2\sqrt{18}+3\sqrt{27}}=\dfrac{2\sqrt{5}-4\sqrt{2}+6\sqrt{3}}{3\sqrt{5}-6\sqrt{2}+9\sqrt{3}}=\dfrac{2\left(\sqrt{5}-2\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)}{3\left(\sqrt{5}-2\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)}=\dfrac{2}{3}$

ΑΣΚΗΣΗ 5

$$A=64\cdot\left(5\sqrt{\frac{3}{4}}-\frac{4}{3}\cdot\sqrt{12}+8\cdot\sqrt{27}-10\sqrt{\frac{3}{16}}\right)^{-2}=64\cdot\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}-\frac{8\sqrt{3}}{3}+24\sqrt{3}-\frac{10\sqrt{3}}{4}\right)^{-2}=\ldots=$$

$$64\cdot\left(\frac{1}{66}\right)^{2}=\frac{4}{4.356}$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

α. $\frac{4}{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

β. $\frac{5}{\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt{5}}{5}=\sqrt{5}$

γ. $\frac{9}{\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

δ. $\frac{\sqrt{2}+3\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{2}+3\sqrt{5}\right)\sqrt{2}}{2}=\frac{2+3\sqrt{10}}{2}$

ε. $\frac{2-\sqrt{27}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}-9}{3}$

ΑΣΚΗΣΗ 7

$$A=\sqrt{3^{-20}\sqrt{3^{-20}\sqrt{3^{200}}}}=\sqrt{3^{-20}\sqrt{3^{-20}\sqrt{\left(3^{100}\right)^{2}}}}=\sqrt{3^{-20}\sqrt{3^{-20}\cdot 3^{100}}}=\ldots=\sqrt{3^{20}}=\sqrt{\left(3^{10}\right)^{2}}=3^{10}$$

ΑΣΚΗΣΗ 8

$$A=\sqrt{\beta^{2}+\gamma\sqrt{\alpha^{2}-\beta\sqrt{\alpha^{2}-\gamma^{2}}}}-\alpha=\sqrt{\beta^{2}+\gamma\sqrt{\alpha^{2}-\beta\sqrt{\beta^{2}}}}-\alpha=\ldots=\sqrt{\alpha^{2}}-\alpha=\alpha-\alpha=0$$

ΑΣΚΗΣΗ 9

α. $7\sqrt{3}+12x=\sqrt{12}+2x\Leftrightarrow 7\sqrt{3}-4\sqrt{3}=-12x+2x\Leftrightarrow 3\sqrt{3}=-10x\Leftrightarrow x=-\frac{3\sqrt{3}}{10}$

β. $\left(2\sqrt{2}+\sqrt{32}\right)x=\sqrt{50}\Leftrightarrow\left(2\sqrt{2}+4\sqrt{2}\right)x=5\sqrt{2}\Leftrightarrow 6\sqrt{2}x=5\sqrt{2}\Leftrightarrow x=\frac{5}{6}$

γ. $x\sqrt{12}-2x\sqrt{3}=5\Leftrightarrow 2x\sqrt{3}-2x\sqrt{3}=5\Leftrightarrow 0x=5$ (Αδύνατη)

«ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ – ΜΟΝΩΝΥΜΑ»

Α. Ερωτήσεις Σωστού- Λάθος

α. Λάθος
β. Σωστό
γ. Σωστό
δ. Σωστό
ε. Λάθος
στ. Λάθος
ζ. Σωστό
η. Λάθος
θ. Λάθος
ι. Λάθος

Β. Θέματα ανάπτυξης

ΑΣΚΗΣΗ 1

Μονώνυμο	Συντελεστής	Κύριο Μέρος	Βαθμός ως προς x	Βαθμός ως προς y	Βαθμός ως προς ω	Βαθμός ως προς x, y και ω
$\frac{1}{4}x^4y^5\omega^2$	$\frac{1}{4}$	$x^4y^5\omega^2$	4	5	2	11
$-\sqrt{21}x^5\omega$	$-\sqrt{21}$	$x^5\omega$	5	-	1	6

ΑΣΚΗΣΗ 2

i. Πρέπει: $\lambda=5$ και $3=\mu+1 \Leftrightarrow \mu=2$.

ii. Πρέπει: $2\lambda-1=-\lambda \Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{3}$ και $\mu=3$.

ΑΣΚΗΣΗ 3

α. $3x$
β. $5z$
γ. $6y^2$
δ. $2x$
ε. $-2y$
στ. x^2
ζ. $6y^3$
η. $3a$

ΑΣΚΗΣΗ 4

$A=2x^2y-5xy^3+4$ για $x=-1$ και $y=2$ έχουμε:

$A=2\cdot(-1)^2\cdot 2-5\cdot(-1)\cdot 2^3+4=4+40+4=48$

ΑΣΚΗΣΗ 5

$A=5x^{\lambda}y^{\mu}\omega^{\nu}-\frac{1}{3}x^{2\lambda-3}y^2\omega^{8-\nu}$ πρέπει:

$\lambda=2\lambda-3 \Leftrightarrow \lambda-2\lambda=-3 \Leftrightarrow -\lambda=-3 \Leftrightarrow \lambda=3, \mu=2$, $\nu=8-\nu \Leftrightarrow 2\nu=8 \Leftrightarrow \nu=4$

ΑΣΚΗΣΗ 6

i. Πρέπει:

$$\begin{cases} 3(2\kappa-1)=-6 \\ 2\lambda+\lambda+1=7 \\ \mu+3+\mu=9 \end{cases} \Leftrightarrow \ \dots \ \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa=-0,5 \\ \lambda=2 \\ \mu=3 \end{cases}$$

ii. Πρέπει:

$$\begin{cases} -2(3\mu-1)=\mu \\ 2\lambda+3+\lambda+5=1 \\ \kappa+1+3=2 \end{cases} \Leftrightarrow \ \dots \ \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa=-2 \\ \lambda=-\dfrac{7}{3} \\ \mu=\dfrac{2}{7} \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

$\Pi=2x\sqrt{2}+6x=\left(2\sqrt{2}+6\right)x$ και για $x=3$, έχουμε: $\Pi=6\sqrt{2}+18$.

ΑΣΚΗΣΗ 8

$$\upsilon_\mu=\frac{2\upsilon_1+3\upsilon_2}{5}$$

ΑΣΚΗΣΗ 9

$$\left.\begin{matrix} E_1=\pi\rho_1^2 \\ E_2=\pi\rho_2^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} E_1=\pi(3x)^2 \\ E_2=\pi(4x)^2 \end{matrix}\right\} \ \dots\dots \Rightarrow \ E=E_1+E_2=25\pi x^2$$ άρα $\rho=5x$.

«ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ»

Α. Ερωτήσεις Σωστού- Λάθος

α. Λάθος
β. Λάθος
γ. Λάθος
δ. Λάθος
ε. Λάθος
στ. Λάθος
ζ. Λάθος
η. Σωστό
θ. Λάθος
ι. Λάθος

Β. Θέματα ανάπτυξης

ΑΣΚΗΣΗ 1

$P(0)=1,\ P(1)=-1^3+1^2-2+1=-1,$

$P(-2)=-(-2)^3+(-2)^2-2\cdot(-2)+1=8+4+4+1=17$

Άρα, $P(0)-P(1)+2\cdot P(-2)=1-(-1)+2\cdot 17=1+1+34=36$.

ΑΣΚΗΣΗ 2

$$\left.\begin{array}{l}P(x)=-x^3+x^2-2x+1\\ Q(x)=ax^3-ax^2+a+\beta x+\beta+\gamma\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}P(x)=-x^3+x^2-2x+1\\ Q(x)=ax^3-ax^2+\beta x+\alpha+\beta+\gamma\end{array}\right\}\Rightarrow\ldots\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha=-1\\ \beta=-2\\ \gamma=4\end{array}\right\}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Αν $\mathrm{A}(x)=-x^3+3x^2-5x-1$, $\mathrm{B}(x)=2x^2+5x-1$ και $\Gamma(x)=-x^3-x^2-x+1$, έχουμε:

$\mathrm{A}(x)+\mathrm{B}(x)=-x^3+3x^2-5x-1+2x^2+5x-1=-x^3+5x^2-2$,

$\mathrm{A}(x)+\mathrm{B}(x)-\Gamma(x)=\ldots=-x^3+5x^2-2-\left(-x^3-x^2-x+1\right)=6x^2+x-3$,

$\mathrm{A}(x)-(\mathrm{B}(x)-\Gamma(x))=-x^3+3x^2-5x-1-\left(2x^2+5x-1+x^3+x^2+x-1\right)=-2x^3-11x+1$

$-\mathrm{A}(x)-\mathrm{B}(x)-\Gamma(x)=-\left(-x^3+5x^2-2\right)-\left(-x^3-x^2-x+1\right)=2x^3-4x^2+x+1$.

ΑΣΚΗΣΗ 4

$P(x)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)=\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)=x^4-5x^2+4$

$Q(x)=\left(\alpha x^2+\beta x\right)\left(\gamma x^2+\delta\right)+4=\alpha\gamma x^4+\alpha\delta x^2+\beta\gamma x^3+\beta\delta x+4$

$=\alpha\gamma x^4+\beta\gamma x^3+\alpha\delta x^2+\beta\delta x+4$

Άρα:

$$\left.\begin{aligned}\alpha\gamma&=1\\ \beta\gamma&=0\\ \alpha\delta&=-2\\ \beta\delta&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ldots\Rightarrow\left.\begin{aligned}\alpha&=\frac{1}{\gamma}\\ \beta&=0\\ \delta&=-\frac{5}{\alpha}\end{aligned}\right\}\text{και}$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=0\Rightarrow\frac{1}{\gamma}+\gamma-5\gamma=-3\Rightarrow\ldots\Rightarrow4\gamma^2-3\gamma-1=0$$

Άρα $\gamma_1=1$ ή $\gamma_2=-\frac{1}{4}$. Επομένως, $\alpha=1$, $\beta=0$, $\gamma=1$, $\delta=-5$ ή $\alpha=-4$, $\beta=0$, $\gamma=-\frac{1}{4}$ και $\delta=-\frac{5}{4}$.

ΑΣΚΗΣΗ 5

α. $7\alpha+7\beta$

β. $5x-5-6x-2=-x-7$

γ. $3a^2-\left[\left(a-5a^3\right)+2a^2-\left(3+2a^2\right)\right]-\left(3a-5a^2\right)=\ldots=5a^3+8a^2-4a+3$

δ. $3z^2-\left\{2z^2-\left[3z-\left(2-z^3\right)+2z\right]\right\}-\left\{z^3-\left[z-\left(2-z^2\right)-z^2\right]-2\right\}+3=$

$3z^2-\left[2z^2-\left(3z-2+z^3+2z\right)\right]-\left[z^3-\left(z-2+z^2-z^2\right)-2\right]+3=\ldots.=z^2+6z+1$

ε. $\left(2x^2-x-4\right)\left(5x+3\right)=\ldots=10x^3+x^2-23x-12$

στ. $\left(4x+4y\right)\left(2x-y\right)=8x^2+8xy-4xy-4y^2=8x^2+4xy-4y^2$

ζ. $\left(t^4-3-2t^2\right)\left(2t-1-2t^3\right)=\ldots=-2t^7+6t^5-t^4+2t^3+2t^2-6t+3$

η. $\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right)=\left(x^2+x+2x+2\right)\left(x+3\right)=\ldots=x^3+6x^2+11x+6$

θ. $\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\right)\left(\alpha-\beta\right)\left(\alpha^3+\beta^3\right)\left(\alpha^6+\beta^6\right)=$

$\left(\alpha^3-\beta^3\right)\left(\alpha^3+\beta^3\right)\left(\alpha^6+\beta^6\right)=\left(\alpha^6-\beta^6\right)\left(\alpha^6+\beta^6\right)=\alpha^{12}-\beta^{12}$

ι. $2x-2x\left(3x^2-1\right)+\left(2-x\right)\left(-3x\right)-\left(-3x\right)^2=\ldots=-6x^3-6x^2-2x$

ΑΣΚΗΣΗ 6

$P(x)=2x+x^2+3$, $Q(x)=x^2-5x-8$

$P(x)+Q(x)=2x+x^2+3+x^2-5x-8=2x^2-3x-5$

$3P(x)-4Q(x)=3(2x+x^2+3)-4(x^2-5x-8)=6x+3x^2+9-4x^2+20x+32=-x^2+26x+41$

ΑΣΚΗΣΗ 7

$(2x+3)(x^2+x-1)-(x^2-1)(x+2)-2x^3=\ldots=-x^3+3x^2+2x-1$

Για $x=-2$ έχουμε: $-(-2)^3+3\cdot(-2)^2+2\cdot(-2)-1=8+12-4-1=20-5=15$.

ΑΣΚΗΣΗ 8

$A=x^2-2x+1,\ B=2x^2-3,\ \Gamma=-x^3+5x^2-2$

$-2A+B-\Gamma=-2(x^2-2x+1)+2x^2-3-(-x^3+5x^2-2)=\ldots=x^3-5x^2+4x-3$

$A\cdot B=(x^2-2x+1)\cdot(2x^2-3)=\ldots=2x^4-4x^3-x^2+6x-3$

$(-1)^3-5\cdot(-1)+4\cdot(-1)-3=\ldots=-13$

$2\cdot(-1)^4-4\cdot(-1)^3-(-1)^2+6\cdot(-1)-3=\ldots=-2$

ΑΣΚΗΣΗ 9

$P(x)=(a^2-2a)x^4+(a^2-4)x^3+2(a-2)x^2+ax+3$

α. $a=2$

β. $P(0)=3$, ανεξάρτητο του α.

γ. $a=0: P(x)=-4x^3-4x^2+3$

δ. $P(x)=-x^4-3x^3-2x^2+x+3$,

$P(1)=-1-3-2+1+3=-2$

$P(-1)=-1+3-2-1+3=2$

Συνεπώς, $(P(1)+P(-1))^2=(-2+2)^2=0$.

«ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ»

Α. Ερωτήσεις Σωστού- Λάθος

α. Σωστό
β. Λάθος
γ. Λάθος
δ. Λάθος
ε. Λάθος
στ. Λάθος
ζ. Λάθος
η. Σωστό
θ. Λάθος
ι. Λάθος

Β. Θέματα ανάπτυξης

ΑΣΚΗΣΗ 1

α. $100+20\kappa+\kappa^2$
β. $16-8x+x^2$
γ. $36\kappa^2+60\kappa+25$
δ. $4\alpha^2-28\alpha\beta+49\beta^2$
ε. $\alpha^2-4\alpha\beta+4\beta^2$
στ. $\alpha^2-2\alpha\beta^3+4\beta^6$
ζ. $9\alpha^4+24\alpha^3\beta+4\alpha^2\beta^2$
η. $\kappa^{2\nu}-2\kappa^\nu\lambda^\nu+\lambda^{2\nu}$
θ. $\frac{9}{4}\alpha^2-4\alpha\beta+\frac{16}{9}\beta^2$
ι. $2x^2-2x\sqrt{10y}+5y$
ια. $x^3-6x^2+12x-8$
ιβ. $8\alpha^3+36\alpha^2\beta+54\alpha\beta^2+27\beta^3$
ιγ. $\alpha^3+\frac{3}{2}\alpha^2\beta+\frac{3}{4}\alpha\beta^2+\frac{1}{8}\beta^3$
ιδ. $x^6-x^4y+\frac{x^2y^2}{3}-\frac{y^3}{27}$
ιε. $4\kappa^2-\lambda^2$
ιστ. x^4-y^2
ιζ. $4x^4y^2-36$
ιη. $\alpha^4-\beta^2$
ιθ. $5\alpha-3\beta$
κ. $\frac{x^2}{121}-\frac{25y^2}{169}$

ΑΣΚΗΣΗ 2

$$Q(x)=P(2x-3)=(2x-3)^2-2\cdot(2x-3)+1=4x^2-12x+9-4x+6+1=4x^2-20x+16$$

$$R(x)=P(x^2-1)=(x^2-1)^2-2(x^2-1)+1=x^4-2x^2+1-2x^2+2+1=x^4-4x^2+4$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

α. x^3-1
β. $27x^3-8$
γ. $x^3+\frac{1}{125}$
δ. $x^3+3\sqrt{3}$
ε. $x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz$
στ. $x^2+y^2+\frac{1}{25}+2xy-2\frac{x}{5}+2\frac{y}{5}$
ζ. $x^2+y^2+4-2xy+4y-4x$
η. $x^2+4y^2+1-2x+4xy-4y$

ΑΣΚΗΣΗ 4

α. $x=-1$

β. $x=1$

γ. $x^2+\frac{1}{x^2}=7$

δ. $x=y$

ε. $-2xy$

ΑΣΚΗΣΗ 5

$$P(x)=(x-1)^2-(3x-2)^2-2x(5-4x)=x^2-2x+1-(9x^2+12x-4)-10x+8x^2=-3$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

$$Q(x)=P(1-2x)-P(P(x))=(1-2x)^3-2-\left[\left(x^3-2\right)^3-2\right]=$$
$$1-6x+12x^2-8x^3-2-\left(x^9-6x^6+12x^3-8-2\right)=\ldots=-x^9+6x^6-20x^3+12x^2-6x+9$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

α. $\frac{1}{\sqrt{11}-3}=\frac{\sqrt{11}+3}{2}$

β. $\frac{3\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)}{5}$

γ. $\frac{17}{1-3\sqrt{2}}=\frac{17\left(1-3\sqrt{2}\right)}{-17}=-3\sqrt{2}-1$

ΑΣΚΗΣΗ 8

$P(x)=2x^3-3x^2+4x-5$,

$Q(x)=P(x+1)-P(x-1)=$

$2(x+1)^3-3(x+1)^2+4(x+1)-5-2(x-1)^3+3(x-1)^2-4(x-1)+5=\ldots.=$

$12x^2-12x+12$

ΑΣΚΗΣΗ 9

$K=(x+y)^3-(x-y)^3-6x^2y-y^3=$

$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3-x^3+3x^2y-3xy^2+y^3-6x^2y-y^3=y^3$

$A=(200000+4)^3-(200000-4)^3-24\cdot 200000^2-64=4^3=64$

ΑΣΚΗΣΗ 10

$(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)+(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta-\gamma)=0 \Leftrightarrow$

$\left[\alpha+(\beta-\gamma)\right]\cdot\left[\alpha-(\beta-\gamma)\right]+\left[\alpha+(\beta+\gamma)\right]\cdot\left[\alpha-(\beta+\gamma)\right]=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$

$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$

«ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ»

Α. Ερωτήσεις Σωστού- Λάθος

α. Λάθος
β. Λάθος
γ. Σωστό
δ. Σωστό
ε. Λάθος
στ. Σωστό
ζ. Λάθος
η. Σωστό
θ. Λάθος
ι. Σωστό

Β. Θέματα ανάπτυξης

<u>ΑΣΚΗΣΗ 1</u>

α. $2\alpha(\beta-\delta)$

β. $x(x-3)$

γ. $4x(2x-1)$

δ. $3xy(4x+2y-1)$

ε. $\kappa\lambda(4\lambda-10\kappa+13)$

στ. $(\alpha+\beta)(\alpha+1)$

ζ. $(\alpha+\beta)(x+y)$

η. $\alpha\gamma(\alpha\gamma-\delta)+\beta(\alpha\gamma-\delta)=(\alpha\gamma-\delta)(\alpha\gamma+\beta)$

θ. $(\beta+\gamma)(7\alpha-9\delta)$

ι. $(x^2+3)(x+7)$

ια. $(x-4)(\sqrt{x}-2)$

ιβ. $(\alpha-4)(\alpha+4)$

ιγ. $(4x-y)(4x+y)$

ιδ. $(6x^2-11y)(6x^2+11y)$

ιε. $(4\alpha\beta-5)(4\alpha\beta+5)$

ιστ. $(2x-7)(2x+1)$

ιζ. $(5-a-7\beta)(5+a+7\beta)$

ιη. $\left[(x-3y)-(-x+2y)\right]\left[(x-3y)+(-x+2y)\right]=$
$(x-3y-x+2y)(x-3y+x-2y)=-y(2x-5y)$

ιθ. $(5x-7)(5x-3)$

κ. $\left[(x-8y)-7(x+1)\right]\left[(x-8y)+7(x+1)\right]=\ldots=(-6x-8y-7)(8x-8y+7)$

κα. $\left[\frac{x}{2}-(x-y)\right]\left[\frac{x}{2}+(x-y)\right]=\left(\frac{x}{2}-x+y\right)\left(\frac{x}{2}+x-y\right)=\left(-\frac{x}{2}+y\right)\left(\frac{3x}{2}-y\right)$

κβ. $(x+6)^2$

κγ. $(a+1)^2$

κδ. $(2a+3)^2$

κε. $(7a-\beta)^2$

κστ. $(5\kappa-6\lambda)^2$

κζ. $(x^3-1)^2$

κη. $(x^2-2y^2)^2$

κθ. $(x-1)(x+7)$

λ. $(x-2)(x-3)$

λα. $(x+2)(x+4)$

λβ. $(x+4)(x+8)$

λγ. $(x-9)(x+8)$

λδ. $(2x+1)(x-2)$

λε. $(3x-5)(x-1)$

λστ. $(3x-2)(2x-1)$

ΑΣΚΗΣΗ 2

α. $a(\beta-\gamma)(\beta+\gamma)$

β. $2x(x-4y)(x+4y)$

γ. $(9x^2-4y^2)(9x^2-4y^2)=(3x-2y)(3x+2y)(9x^2+4y^2)$

δ. $(x^2+y^2)(a-\beta)$

ε. $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)-(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta-1)$

στ. $(x+\omega-y)(x+\omega+y)$

ζ. $(x-y+1)^2$

η. $(a-x)^2-(\beta-y)^2=(a-x+\beta-y)(a-x-\beta+y)$

θ. $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta)$

ι. $(x^2-3x)(x^2-3x+2)=x(x-3)(x-1)(x-2)$

ια. $(x-5)(x+5)^2-25(x-5)=x(x-5)(x-10)$

ιβ. $\left[(a+\beta)^2+(a-\beta)^2\right]=4a^2$

ΑΣΚΗΣΗ 3

$\alpha^2\beta+a\beta^2-a+\beta=0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow(\alpha\beta-1)(a-\beta)=0\Leftrightarrow$ $a=\beta$ (αντίθετοι)

ή $a\beta=1$ (αντίστροφοι).

ΑΣΚΗΣΗ 4

$a=3^\nu-3^{\nu+2}+3^{\nu+3}=3^\nu\left(1-3^2+3^3\right)=3^\nu\cdot(28-9)=19\cdot3^\nu$ (πολλαπλάσιο του 19).

ΑΣΚΗΣΗ 5

α. $P(x)=x^4-2x^3-x+2=x^3(x-2)-(x-2)=(x-2)(x^3-1)=$
$(x-2)(x-1)(x^2+x+1)$

β. $P(1-\sqrt{2})=(1-\sqrt{2}-2)(1-\sqrt{2}-1)\left((1-\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{2})+1\right)=\ldots=4-\sqrt{2}$

ΑΣΚΗΣΗ 6

$P(x)=16x^4(x^2-1)-(x^2-1)=(x^2-1)(16x^4-1)=$

$(x-1)(x+1)(4x^2-1)(4x^2+1)=(x-1)(x+1)(2x-1)(2x+1)(4x^2+1)$

$Q(x)=(x^2-1)(4x^2-1)=(x-1)(x+1)(2x-1)(2x+1)$

ΑΣΚΗΣΗ 7

$$A=\sqrt{2^{18}+2^{10}+1}=\sqrt{\left(2^9\right)^2+2\cdot 2^9+1}=\sqrt{\left(2^9+1\right)^2}=513.$$

$$B=\sqrt{2^{10}+2\cdot 2^5\cdot 3^5+3^{10}}=\ldots=\sqrt{\left(2^5+3^5\right)^2}=32+243=275.$$

ΑΣΚΗΣΗ 8

$$A=\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}=1+\sqrt{2}+2+\sqrt{3}=3+\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

$$A=\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}=\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{5}-2+\sqrt{7}-\sqrt{5}=\sqrt{7}-2$$

ΑΣΚΗΣΗ 9

α. Έχουμε $x+y+\omega=0 \Rightarrow x=-y-\omega (1)$

Άρα,

$$x=-y-\omega \Rightarrow$$
$$x^3=-\left(y+\omega\right)^3 \Rightarrow$$
$$x^3=-y^3-3y^2\omega-3y\omega^2-\omega^3 \Rightarrow$$
$$x^3+y^3+\omega^3=3y\omega\left(-y-\omega\right) \Rightarrow$$
$$x^3+y^3+\omega^3=3xy\omega$$

β. Από το ερώτημα i. προκύπτει: $A=3\left(\alpha-\beta\right)\left(\beta-\gamma\right)\left(\gamma-\alpha\right)$.

γ. Από το ερώτημα i. προκύπτει: $\mathrm{A}=3x\left(x-1\right)\left(1-2x\right)$, άρα $x=0$, $x=1$ και $x=\frac{1}{2}$.

δ. Αφού $\alpha+\beta+\gamma=x+y+\omega \Rightarrow (\alpha-x)+(\beta-y)+(\gamma-\omega)=0$ από το ερώτημα i. προκύπτει άμεσα ομοίως.

«ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΚΟΙΝΟ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟ – ΡΗΤΗ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ – ΠΡΑΞΕΙΣ ΡΗΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ»

Α. Ερωτήσεις Σωστού- Λάθος

α. Λάθος
β. Σωστό
γ. Λάθος
δ. Λάθος
ε. Σωστό
στ. Λάθος
ζ. Λάθος
η. Σωστό
θ. Σωστό
ι. Λάθος

Β. Θέματα ανάπτυξης

ΑΣΚΗΣΗ 1

α. $x \neq -7$.

β. $y \neq 0$ και $y \neq 3$.

γ. $z \neq \pm\frac{1}{2}$.

δ. $x \in \mathbb{R}$.

ε. $y \neq \frac{4}{3}$ και $y \neq \frac{1}{10}$.

ΑΣΚΗΣΗ 2

α. $\frac{8a-16\beta}{4\alpha-8\beta}=\frac{8(\alpha-2\beta)}{4(\alpha-2\beta)}=2$

β. $\frac{4\alpha^3-16\alpha}{2\alpha^3+4\alpha^2}=\frac{4\alpha(\alpha^2-4)}{2\alpha^2(\alpha+2)}=\ldots=\frac{2(\alpha-2)}{\alpha}$

γ. $\frac{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta}{\alpha^3\beta-\beta^4}=\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{\beta(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}=\frac{1}{\beta(\alpha-\beta)}$

δ. $\frac{x^2(x+1)+2(x+1)}{x^4(x+1)-4(x+1)}=\frac{(x+1)(x^2+2)}{(x+1)(x^4-4)}=\ldots=\frac{1}{(x^2+2)}$

ε. $\frac{2(x-2)(x+2)}{(x-2)^2}=\frac{2}{(x-2)}$

ΑΣΚΗΣΗ 3

$$A(x,y)=\frac{(x^2+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x^2+y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)}=\frac{(x^2+y^2)(x^3-y^3)(x^3+y^3)}{(x^6-y^6)}=x^2+y^2$$

$$B(x,y)=\frac{4x^2+16xy+16y^2-25}{2x+4y+5}=\frac{(2x+4y+5)(2x+4y-5)}{(2x+4y+5)}=(2x+4y-5).$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

α. $\dfrac{x^2y}{x-4}$

β. $\dfrac{(x+2)y(y-x)}{(y-x)(2-x)(2+x)}=\dfrac{y}{(2-x)}$

γ. $\dfrac{2(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)(x-y)(x+y)}{(x-y)(\alpha-\beta)(x+y)}=2(\alpha+\beta)$

δ. $\dfrac{(x-y)(x+y)}{3(x^2+y^2)}\cdot\dfrac{5(x^2+y^2)}{x(x-y)}=\dfrac{5(x+y)}{3x}$

ε. $\dfrac{(x^2-1)-4(x-1)}{x^3+8}\cdot\dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+4)}=$

$\dfrac{(x-1)(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)}{(x-2)(x^2+2x+4)(x-3)(x-4)}=$

$\dfrac{(x-1)(x+2)(x+3)}{(x^2+2x+4)(x-4)}$

ΑΣΚΗΣΗ 5

α. $\dfrac{x+y+\omega}{xy\omega}$

β. $\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{5xy^2}=\dfrac{15y^2-x}{15x^2y^2}$

γ. $\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{x-2x-6}{x(x+3)}=\dfrac{-x-6}{x(x+3)}$

δ. $\dfrac{2x^2-2x+1}{x(x-1)}-\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{2x^2-2x+1-x^2}{x(x-1)}=\ldots=\dfrac{x-1}{x}$

ε. $\dfrac{1}{2(x-2)}-\dfrac{1}{3(x-2)}+\dfrac{x+8}{3(x-2)(x+2)}=\ldots=\dfrac{x+6}{2(x-2)(x+2)}$

στ. $\dfrac{1}{(x+y)^2}\cdot\left(\dfrac{x^2+y^2}{x^2y^2}\right)+\dfrac{2}{(x+y)^3}\cdot\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{x^2+y^2}{x^2y^2(x+y)^2}+\dfrac{2}{xy(x+y)^2}=\ldots=\dfrac{1}{x^2y^2}$

ζ. $\left(\dfrac{x^2}{y^2}-1\right)\left(1-\dfrac{x^2}{x^2-y^2}\right)=\dfrac{x^2-y^2}{y^2}\cdot\dfrac{x^2-y^2-x^2}{x^2-y^2}=-1.$

ΑΣΚΗΣΗ 6

$$\frac{\alpha-\beta}{\gamma}+\frac{\beta-\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma-\alpha}{\beta}=0\Leftrightarrow\frac{\alpha^2\beta-\alpha\beta^2+\beta^2\gamma-\beta\gamma^2+\alpha\gamma^2-\alpha^2\gamma}{\alpha\beta\gamma}=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha^2(\beta-\gamma)-\alpha(\beta^2-\gamma^2)+\beta\gamma(\beta-\gamma)}{\alpha\beta\gamma}=0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\frac{(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}{\alpha\beta\gamma}=0$$

Άρα $\alpha=\beta=\gamma$.

ΑΣΚΗΣΗ 7

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\nu-1}-\frac{1}{\nu+1}\right)=\frac{\nu+1-\nu+1}{2(\nu-1)(\nu+1)}=\ldots=\frac{1}{(\nu-1)(\nu+1)}.$$

Άρα για $\nu=2$: $S=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

ΑΣΚΗΣΗ 8

α. $(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$.

β. $\alpha+\beta+\gamma$

ΑΣΚΗΣΗ 9

α. Η παράσταση ορίζεται για $x\neq 0,\pm 2$.

β. $$\mathrm{A}=\frac{x}{x+2}-\frac{x}{x(x-2)}+\frac{5x+2}{(x-2)(x+2)}=\frac{x^2(x-2)-x(x+2)+x(5x+2)}{x(x-2)(x+2)}=$$

$$\frac{x^2+2x}{x(x-2)(x+2)}=\frac{x}{x-2}$$

γ. $$x=\sqrt{\frac{9}{\left(\sqrt{10}-1\right)^2}-\frac{1}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2}}=\sqrt{\frac{9}{11-2\sqrt{10}}-\frac{1}{7-2\sqrt{10}}}=\ldots=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$$

$$\mathrm{A}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-2}=\ldots=-\frac{1}{2}$$

«ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Α΄ ΒΑΘΜΟΥ»

Α. Ερωτήσεις Σωστού- Λάθος

α. Σωστό
β. Λάθος
γ. Λάθος
δ. Σωστό
ε. Λάθος
στ. Λάθος
ζ. Λάθος

Β. Θέματα ανάπτυξης

ΑΣΚΗΣΗ 1

α. $-2x=7 \Leftrightarrow x=-\frac{7}{2}$

β. $3x+1=2x+14 \Leftrightarrow x=13$

γ. $3x=4 \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$

δ. $\frac{x}{2}-\frac{2}{3}=\frac{x}{3}+1 \Leftrightarrow 6\cdot\frac{x}{2}-6\cdot\frac{2}{3}=6\cdot\frac{x}{3}+6 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x=10$

ε. $\frac{2x+8}{4}-\frac{7-3x}{8}=1 \Leftrightarrow 8\cdot\frac{2x+8}{4}-8\cdot\frac{7-3x}{8}=8\cdot 1 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x=-\frac{1}{7}$

ΑΣΚΗΣΗ 2

α. $\frac{2}{3}\left(\frac{x-1}{2}-1\right)-\left[x-\left(\frac{3}{2}+\frac{1-x}{3}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(x-\frac{5}{3}\right)+\frac{5}{6}(x-1)-1 \Leftrightarrow$

$\frac{2x-2}{6}-\frac{2}{3}-\left(x-\frac{3}{2}-\frac{1-x}{3}\right)=\frac{x}{2}-\frac{5}{6}+\frac{5x}{6}-\frac{5}{6}-1 \Leftrightarrow \ \ldots \Leftrightarrow x=-\frac{2}{7}$

β. $\frac{x-\frac{2x+3}{9}}{8}-\frac{x-\frac{1}{3}}{2}=\frac{2x-\frac{5(x-3)}{6}}{4}-\frac{x+1}{3} \Leftrightarrow$

$\frac{9x-2x-3}{72}-\frac{3x-1}{6}=\frac{12x-5x-15}{24}-\frac{x+1}{3} \Leftrightarrow \ \ldots \Leftrightarrow x=\frac{39}{23}$

ΑΣΚΗΣΗ 3

α. $(3x-1)^2+6x=3(3x^2-1) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 0x=-2$

β. $(x+2)^3-(x-1)^3=9x^2+x+25 \Leftrightarrow$

$x^3+6x^2+12x+8-x^3+3x^2-3x+1-9x^2-x-25=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x=2$

ΑΣΚΗΣΗ 4

$$6\cdot\frac{2x}{3}+6\cdot\frac{1-3x}{2}=6\Leftrightarrow 4x+3-9x=6\Leftrightarrow \ldots\Leftrightarrow x=-\frac{3}{5}$$

$$\frac{\lambda\left(-\frac{3}{5}\right)}{5}+\frac{1-\lambda}{3}+\frac{\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}=-1\Leftrightarrow -\frac{3\lambda}{25}+\frac{1-\lambda}{3}-\frac{3}{10}=-1\Leftrightarrow \ldots\Leftrightarrow \lambda=-\frac{55}{32}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

$(2\mu+1)x+1=x+4\mu\Leftrightarrow 2\mu x=4\mu-1$

Για $\mu=0$: $0x=-1$.

Δεν υπάρχουν $\mu\in\mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση να είναι αόριστη.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Έστω οι x: μαθητές

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{7}+3=x\Leftrightarrow 28\cdot\frac{x}{2}+28\cdot\frac{x}{4}+28\cdot\frac{x}{7}+28\cdot 3=28\cdot x\Leftrightarrow \ldots\Leftrightarrow x=28$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

x: ηλικία πατέρα, 50-x: ηλικία κόρης

$x-3=3(50-x-3)\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow x=37$

Άρα ο πατέρας είναι 37 ετών και η κόρη του είναι 13 ετών.

ΑΣΚΗΣΗ 8

Έστω x: ώρες λειτουργίας της μηχανής Α και

$12-x$: ώρες λειτουργίας της μηχανής Β.

$40x+30(12-x)=400\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow x=4$

ΑΣΚΗΣΗ 9

Έστω x ο ένας αριθμός και 2100-x, ο άλλος.

Τότε: $\dfrac{2100-x}{x}=4\Rightarrow\ldots\Rightarrow x=420$.

Οπότε ο άλλος είναι 1680.

«ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Β΄ ΒΑΘΜΟΥ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ»

Α. Ερωτήσεις Σωστού- Λάθος

α. Λάθος
β. Λάθος
γ. Σωστό
δ. Λάθος
ε. Σωστό
στ. Λάθος
ζ. Σωστό
η. Σωστό
θ. Λάθος
ι. Λάθος

Β. Θέματα ανάπτυξης

ΑΣΚΗΣΗ 1

α. $x^2-x=0 \Leftrightarrow x(x-1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$.

β. $8x^2-18=0 \Leftrightarrow 2(4x^2-9)=0 \Leftrightarrow 2(2x-3)(2x+3)=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$ ή $x=-\frac{3}{2}$.

γ. $(x^2-1)(x^2-4)=0 \Leftrightarrow x(x-1)(x-2)(x+2)=0 \Leftrightarrow x=0$
ή $x=1$ ή $x=2$ ή $x=-2$.

δ. $(3x-2)(3x-3)=0 \Leftrightarrow$ $3x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$ ή $3x-3=0 \Leftrightarrow x=1$.

ε. $(x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=2$.

ΑΣΚΗΣΗ 2

α. $3x^2-5x+2=0$, όπου: $a=3$, $\beta=-5$, $\gamma=2$ άρα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=1$ και

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{5\pm1}{6}=1 \text{ ή } \frac{2}{3}.$$

β. Ομοίως, $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=0, x=\frac{-\beta}{2\alpha}=\frac{18}{6}=3$

γ. Ομοίως, $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=-3$, αδύνατη.

δ. Ομοίως, $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=-31$, αδύνατη.

ΑΣΚΗΣΗ 3

α. $x(x^4-1)=0 \Leftrightarrow x(x^2-1)(x^2+1)=0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1)(x^2+1)=0$
Άρα $x=0$ ή $x=1$ ή $x=-1$.

β. $2x^3-4x^2-5x+10=0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow (2x^2-5)(x-2)=0$
Άρα $x=2$ ή $x=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$.

γ. $2x^3-4x^2-5x+10=0 \Leftrightarrow 4x^2(x-3)-1(x-3)=0 \Leftrightarrow .. \Leftrightarrow (2x-1)(2x+1)(x-3)=0$
Άρα $x=3$ ή $x=\pm\frac{1}{2}$.

δ. $(x+1)(x^2-4)-3(x-2)(x+1)=0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow (x+1)(x-2)(x-1)=0$
Άρα $x=-1$ ή $x=2$ ή $x=1$.

ΑΣΚΗΣΗ 4

α. $(2x+3)(x-1)(x+1)-(x+1)^2(x-1)=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (x+1)(x-1)(x+2)=0$

Άρα $x=-1$ ή $x=1$ ή $x=-2$.

β. $(x-2)^2(x+2)^2-(x+2)^2(5x-4)=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (x+2)^2(x^2-9x+8)=0$

Άρα $x=-2$ ή $x=1$ ή $x=8$.

γ. Έστω $\omega=x^2-x-4$ τότε $\omega^2+2\omega-8=0$, άρα $\omega_1=-4$ ή $\omega_2=2$.

Επομένως $x^2-x-4=-2 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x_1=2$ ή $x_2=-1$.

$x^2-x-4=2 \Leftrightarrow x^2-x-6=0 \Leftrightarrow x_1=3$ ή $x_2=-2$.

δ. Έστω $\omega=x^2+2x+19$ τότε $\omega^2-3\omega-4=0$, άρα $\omega_1=4$ ή $\omega_2=-1$.

Επομένως $x^2+2x+19=4 \Leftrightarrow x^2+2x+15=0$ (αδύνατη).

$x^2+2x+19=-1 \Leftrightarrow x^2+2x+20=0$ (αδύνατη).

ΑΣΚΗΣΗ 5

$(\lambda^2-2\lambda-2)x^2+(4\lambda+7)x+2\lambda^2=0$. Για $x=-2$:

$(\lambda^2-2\lambda-2)(-2)^2+(4\lambda+7)(-2)+2\lambda^2=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 3\lambda^2-8\lambda-11=0$

$\Delta=64+132=196$

Άρα $\lambda_{1,2}=\dfrac{8\pm14}{6} \Rightarrow \lambda_1=-1$ ή $\lambda_2=\dfrac{11}{3}$, απορρίπτεται αφού λ ακέραιος.

ΑΣΚΗΣΗ 6

$x^2+2\lambda x+\lambda^2-1=0$, όπου $\alpha=1, \beta=2\lambda, \gamma=\lambda^2-1$.

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(2\lambda)^2-4(\lambda^2-1)=4\lambda^2-4\lambda^2+4=4>0$, για κάθε λ.

$x_{1,2}=\dfrac{\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-2\lambda\pm2}{2} \Rightarrow x_1=-\lambda+1$ ή $x_2=-\lambda-1$.

ΑΣΚΗΣΗ 7

$(\lambda^2-3\lambda+2)x^2+(\lambda-2)x+3=0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda-2)x^2+(\lambda-2)x+3=0$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(\lambda-2)^2-12\cdot(\lambda^2-3\lambda+2)=(\lambda-2)(-11\lambda+10)$.

Για $\lambda_1=2$ ή $\lambda_2=\dfrac{10}{11}$ είναι αόριστη.

Για $\lambda_2\in\left(-\infty,\dfrac{10}{11}\right)\cup(2,+\infty)$ είναι αδύνατη.

ΑΣΚΗΣΗ 8

$\Pi=14 \Rightarrow 2x+2y=14 \Rightarrow x+y=7 \Rightarrow y=7-x$ (1)

$\mathrm{y}^2-7\mathrm{y}+12=0 \Rightarrow$ $\mathrm{y}=3$ και από την (1) $\mathrm{x}=4$, ή $\mathrm{y}=4$, $\mathrm{x}=3$.

ΑΣΚΗΣΗ 9

$\mathrm{x}^2-15\mathrm{x}+56=0 \Leftrightarrow$ $\mathrm{x}=7$ ή $\mathrm{x}=8$.

«ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ & ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ»

Α. Ερωτήσεις Σωστού- Λάθος

α. Σωστό
β. Σωστό
γ. Λάθος
δ. Σωστό
ε. Λάθος

Β. Θέματα ανάπτυξης

ΑΣΚΗΣΗ 1

$\alpha^2-12\alpha+36\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-6)^2\geq 0$ ισχύει για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$, η ισότητα ισχύει για $\alpha=6$.

ΑΣΚΗΣΗ 2

$(\alpha+\beta)^2\geq 0 \Leftrightarrow 2\alpha^2+2\beta^2-\alpha^2-2\alpha\beta-\beta^2\geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2\geq 0$,

ισχύει για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, η ισότητα ισχύει για $\alpha=\beta$.

ΑΣΚΗΣΗ 3

$\alpha^2-4\alpha+4+\beta^2\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-2)^2+\beta^2\geq 0$ ισχύει για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, η ισότητα ισχύει για $\alpha=2$ και $\beta=0$.

ΑΣΚΗΣΗ 4

$$\left.\begin{array}{l}0\leq\alpha\leq 10\\ 0\leq\beta\leq 12\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}0\leq 3\alpha\leq 30\\ 0\leq 2\beta\leq 24\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}0\leq 3\alpha\leq 30\\ -24\leq -2\beta\leq 0\end{array}\right\}\underset{(+)}{\Leftrightarrow}-24\leq A\leq 30$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

α. $3x+3-x+1\geq 5-x \Leftrightarrow 3x\geq 1 \Leftrightarrow x\geq\frac{1}{3}$

β. $4y-2-(y+3)<3(y+3)+2 \Leftrightarrow 4y-2-y-3<3y+9+2 \Leftrightarrow 0y<16$

γ. $x+5+\frac{x-3}{3}-\frac{x-2}{2}>0 \Leftrightarrow 6\cdot x+6\cdot 5+6\cdot\frac{x-3}{3}-6\cdot\frac{x-2}{2}>0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x>-6$

δ. $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{x-1}{2}-\frac{x-2}{3}\right)-\frac{x+1}{6}>3 \Leftrightarrow \frac{x-1}{6}-\frac{x-2}{9}-\frac{x+1}{6}>3 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$

$-2x>56 \Leftrightarrow x<-28$

ΑΣΚΗΣΗ 7

α.

$$2y-8<\frac{3y}{4}+\frac{3}{4}\Leftrightarrow$$
$$4\cdot 2y-4\cdot 8<4\cdot\frac{3y}{4}+4\cdot\frac{3}{4}\Leftrightarrow$$
$$....\Leftrightarrow$$
$$y<7$$

και

$$\frac{3y}{2}+\frac{1}{12}<y-2\Leftrightarrow$$
$$12\cdot\frac{3y}{2}+12\cdot\frac{1}{12}<12\cdot y-12\cdot 2\Leftrightarrow$$
$$...\Leftrightarrow$$
$$y<-\frac{25}{6}$$

Άρα $y<-\frac{25}{6}$.

β.

$$4x-3<5\Leftrightarrow \quad 4x<8\Leftrightarrow \quad x<2$$

και

$$2x-6>-4\Leftrightarrow \quad 2x>2\Leftrightarrow \quad x>1$$

και

$$2x\geq 3(x-1)\Leftrightarrow \quad 2x\geq 3x-3\Leftrightarrow \quad x\leq 3$$

Άρα $x\in(1,2)$.

γ. $-8<3x+1<22\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow -3<x<7$

Άρα $x\in(-3,7)$.

δ. $4\leq 6x-2\leq 16\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow 1\leq x\leq 3$

Άρα $x\in[1,3]$.

ΑΣΚΗΣΗ 7

Έστω x: ο βαθμός στο τελευταίο διαγώνισμα, θα πρέπει

$$\frac{10+15+19+x}{4}>16\Leftrightarrow x+44>64\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow x>20$$

Αδύνατη.

ΑΣΚΗΣΗ 8

Έστω x: το μήκος και y: το πλάτος, τότε:

$$\left.\begin{aligned}48-0,20<x<48+0,20\\ 33-0,20<y<33+0,20\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}47,80<x<48,20\\ 32,80<y<33,20\end{aligned}\right\}\text{ άρα}$$

$$161,2<\Pi<162,8 \quad \& \quad 1.567,84<E<1.600,24$$

ΑΣΚΗΣΗ 9

i. $P(x)=x^2(x-2)+x-2=(x-2)(x^2+1)$

ii. Το πολυώνυμο είναι θετικό, αφού είναι γινόμενο θετικών.

iii. $A(x)=2x^2-4x\Leftrightarrow (x-2)(x^2+1)-2x(x-2)=0\Leftrightarrow (x-2)(x-1)^2=0$,

άρα $x=1$ ή $x=2$.

«ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ»

Α. Ερωτήσεις Σωστού- Λάθος

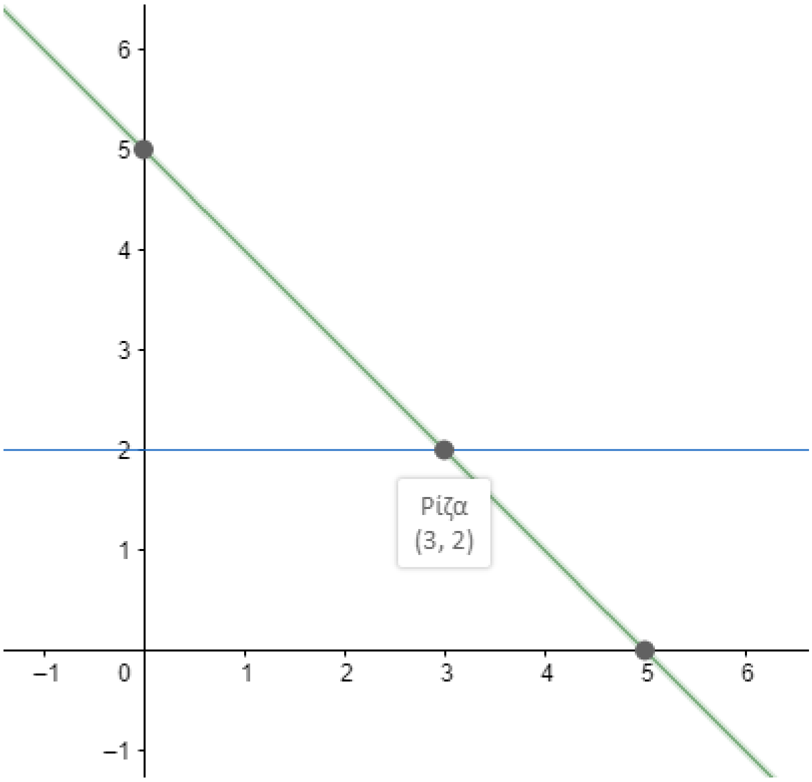
ΑΣΚΗΣΗ 1

α. Λάθος
β. Λάθος
γ. Σωστό
δ. Λάθος
ε. Σωστό
στ. Σωστό
ζ. Σωστό
η. Λάθος
θ. Λάθος
ι. Σωστό
ια. Λάθος
ιβ. Σωστό
ιγ. Σωστό
ιδ. Λάθος
ιε. Λάθος
ιστ. Σωστό
ιζ. Λάθος
ιη. Σωστό

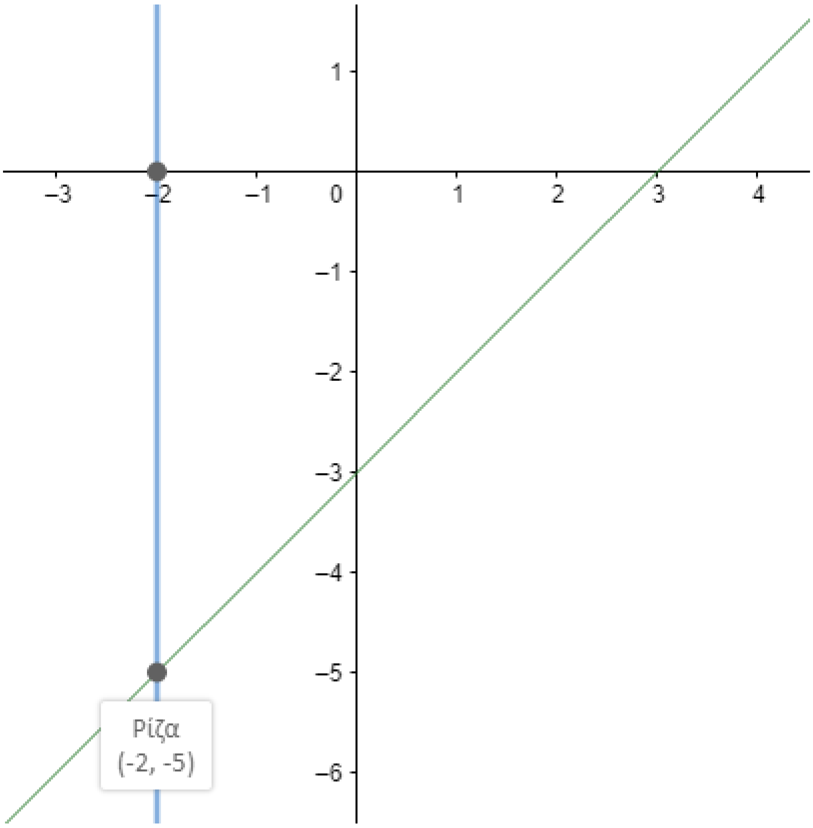
Β. Θέματα ανάπτυξης

ΑΣΚΗΣΗ 2

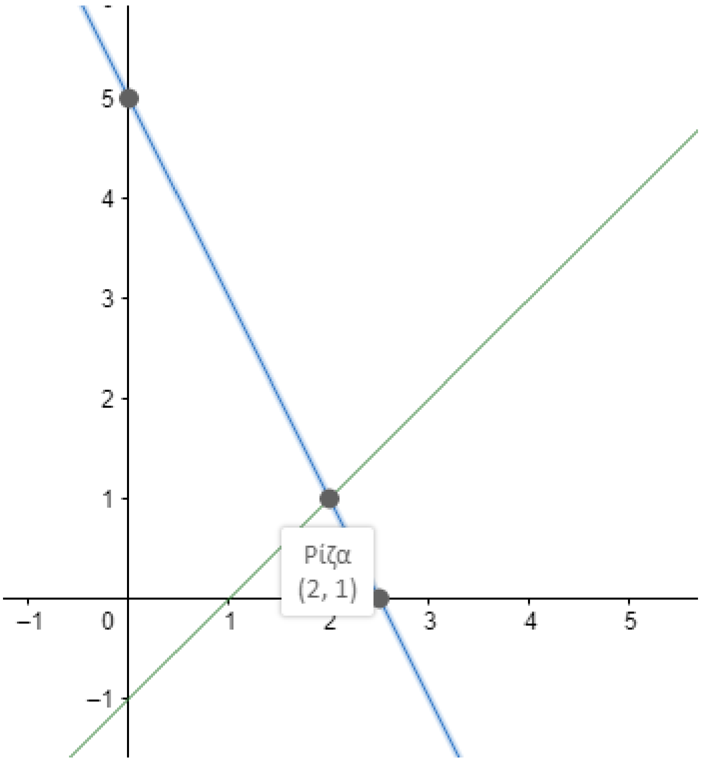
α.



β.



γ.



δ. $\left.\begin{array}{l} 2x+y=4 \\ 2x+y=8 \end{array}\right\}$, Αδύνατο.

ε. $\left.\begin{array}{l} 2x+y=4 \\ 2x+y=4 \end{array}\right\}$, Αόριστο

ΑΣΚΗΣΗ 2

Πρέπει:

$$\left.\begin{array}{l} 5x-y-13=0 \\ -2x+3y-28=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 5x-y=13 \\ -2x+3y=28 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y=5x-13 \\ -2x+3(5x-13)=28 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y=\dfrac{166}{13} \\ x=\dfrac{67}{13} \end{array}\right\}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Πρέπει:

$$\left.\begin{array}{l} 7x-4y=102 \\ 5x+4y=42 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 12x=144 \\ 5\cdot 12+4y=42 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=12 \\ y=-\dfrac{9}{2} \end{array}\right\}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

$\left.\begin{array}{l} 3x+y=2 \\ x-y=2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 4x=4 \\ x-y=2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=1 \\ 1-y=2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=-1 \end{array}\right\}$, επομένως, έχουμε:

$\left.\begin{array}{l} \alpha+\beta=3 \\ 1-\alpha=2\beta \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha+\beta=3 \\ -\alpha-2\beta=-1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} -\beta=2 \\ \alpha-2=3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \beta=-2 \\ \alpha=5 \end{array}\right\}$.

ΑΣΚΗΣΗ 5

α. $\left.\begin{array}{l} x=2 \\ 4x-3y+7=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=\dfrac{11}{3} \end{array}\right\}$

β. $\left.\begin{array}{l} x+y=12 \\ x-y=4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 2x=16 \\ 8+y=12 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=8 \\ y=4 \end{array}\right\}$

γ. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=0 \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{7}=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+2y=0 \\ 7x+3y=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x=y=4$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Έστω x: δωμάτια και y: μαθητές

$$\left.\begin{array}{l} y=2x+1 \\ y=3(x-4) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y=2x+1 \\ y=3x-12 \end{array}\right\} \Leftrightarrow 2x+1=3x-12 \Leftrightarrow x=13$$

$y=2\cdot 13+1=27$.

ΑΣΚΗΣΗ 7

Έστω x: σωστά και y:λάθος

$$\left.\begin{aligned} x+y&=18 \\ 10x-5y&=135 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x&=18-y \\ 180-10y-5y&=135 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x&=18-y \\ -15y&=-45 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x&=15 \\ y&=3 \end{aligned}\right\}$$

ΑΣΚΗΣΗ 8

α. Αν $y=3x+2$,

- για $x=0$, $y=3\cdot 0+2=2$, άρα $\mathrm{A}(0,2)$.
- για $y=0$, $0=3x+2 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}$, άρα $\mathrm{B}\left(-\frac{2}{3},0\right)$.

β.

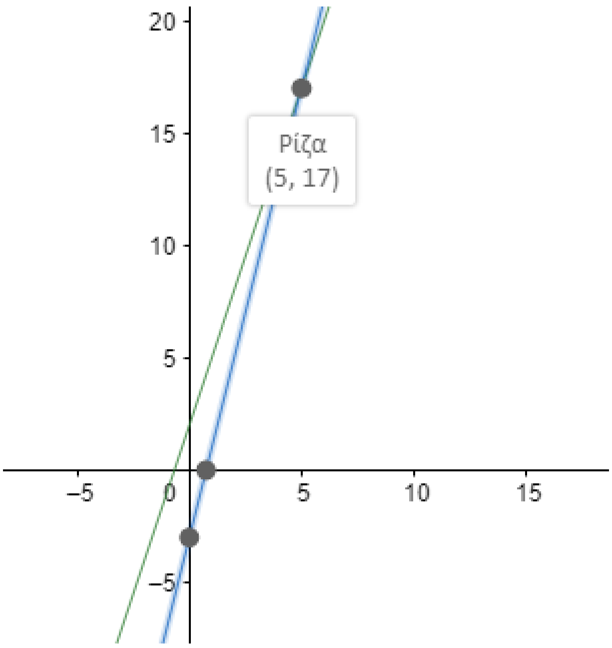
Αν $y=3x+2$,

- για $x=2$, $y=3\cdot 2+2=8$, άρα δεν ανήκει.

Αν $y=4x-3$,

- για $x=2$, $y=4\cdot 2-3=5$, άρα $\mathrm{M}(2,5)$ ανήκει στην ευθεία.

γ.



ΑΣΚΗΣΗ 9

Ταυτότητα είναι αν: $0x=0$.

$$\frac{5}{4}(\lambda x-\mu)=\frac{3}{4}(\lambda-\mu x)+4(2x-1) \Leftrightarrow \frac{5}{4}\lambda x-\frac{5}{4}\mu=\frac{3}{4}\lambda-\frac{3}{4}\mu x+8x-4 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$$

$$(5\lambda+3\mu-32)x=5\mu+3\lambda-16$$

Άρα,

$$\left.\begin{aligned} 5\lambda+3\mu-32&=0 \\ 5\mu+3\lambda-16&=0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow -16\mu=16 \Leftrightarrow \mu=-1,$$

$$5\lambda+3\cdot(-1)=32 \Leftrightarrow 5\lambda-3=32 \Leftrightarrow 5\lambda=35 \Leftrightarrow \lambda=7.$$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

«ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ»

Α. Ερωτήσεις Σωστού- Λάθος

α. Σωστό
β. Λάθος
γ. Λάθος
δ. Λάθος
ε. Σωστό

Β. Θέματα ανάπτυξης

ΑΣΚΗΣΗ 1

m	dm	cm	mm
56	**560**	5.600	56.000
326	3.260	32.600	326.000
3,76	37,6	**376**	3.760
24,524	245,24	2.452,4	**24.524**

ΑΣΚΗΣΗ 2

m^2	dm^2	cm^2	mm^2
5,6	**560**	56.000	5.600.000
3,26	326	**32.600**	3.260.000
3,76	376	37.600	3.760.000
0,024524	2,4524	245,24	**24.524**

ΑΣΚΗΣΗ 3

m^2	dm^2	cm^2	mm^2
0,56	**560**	$5,6\cdot10^5$	$5,6\cdot10^8$
0,0326	32,6	**32.600**	$3,26\cdot10^7$
3,76	3.760	$3,76\cdot10^6$	$3,76\cdot10^9$
$2,4524\cdot10^{-5}$	0,024524	24,524	**24.524**

ΑΣΚΗΣΗ 4

α. $1m^3 = 1.000L$ άρα $2.045L = 2,045m^3$.

β. $0,023m^3$, $23.000cm^3$, $2,3\cdot10^6 mm^3$

«ΓΩΝΙΕΣ»

Α. Ερωτήσεις Σωστού- Λάθος

α. Λάθος
β. Λάθος
γ. Σωστό
δ. Σωστό
ε. Λάθος

Β. Θέματα ανάπτυξης

<u>ΑΣΚΗΣΗ 1</u>

$\hat{\omega} = \frac{1}{18} \cdot 180^0 = 10^0$, άρα $90^0 - \hat{\omega} = 90^0 - 10^0 = 80^0$ και $180^0 - \hat{\omega} = 180^0 - 10^0 = 170^0$.

<u>ΑΣΚΗΣΗ 2</u>

i. $\delta\hat{O}y = \frac{x\hat{O}y}{2} = 70^0$

$y\hat{O}\varepsilon = y\hat{O}\delta + \delta\hat{O}\varepsilon = 70^0 + 35^0 = 105^0$.

ii. $90^0 - \delta\hat{O}y = 90^0 - 70^0 = 20^0$

$180^0 - \delta\hat{O}y = 180^0 - 70^0 = 110^0$

$180^0 - y\hat{O}\varepsilon = 180^0 - 105^0 = 75^0$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 3</u>

α. $\hat{\alpha} = 30^0$ (ως κατακορυφήν)

$\hat{\gamma} = 20^0$ (ως κατακορυφήν)

$\hat{\delta} = 180^0 - \left(20^0 + 30^0\right) = 180^0 - 50^0 = 130^0$.

$\hat{\beta} = \hat{\delta}$ (ως κατακορυφήν)

β. $\hat{z} + 130^0 = 180^0 \Leftrightarrow \hat{z} = 50^0$ (παραπληρωματικές)

$\hat{y} = \hat{z}$ (ως κατακορυφήν)

$\hat{x} = 180^0 - \left(30^0 + 50^0\right) = 180^0 - 80^0 = 100^0$.

<u>ΑΣΚΗΣΗ 4</u>

$\hat{\gamma} = 180^0 - \left(70^0 + 65^0\right) = 180^0 - 135^0 = 45^0$

$\hat{\alpha} = \hat{\gamma}$

$\hat{\beta} = 180^0 - \left(65^0 + 45^0 + 35^0\right) = 180^0 - 145^0 = 35^0$.

«ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ»

Α. Ερωτήσεις Σωστού- Λάθος

α. Σωστό
β. Λάθος
γ. Σωστό
δ. Σωστό
ε. Λάθος
στ. Λάθος
ζ. Σωστό
η. Λάθος
θ. Σωστό
ι. Λάθος

Β. Θέματα ανάπτυξης

ΑΣΚΗΣΗ 1

Διακρίνουμε περιπτώσεις, αφού η ΑΓ δε διευκρινίζεται αν είναι κάθετη πλευρά ή υποτείνουσα.

Επομένως:

1η περίπτωση

Έστω ότι η ΑΓ είναι μια από τις κάθετες πλευρές.

$$ημω = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{υποτείνουσα} \Leftrightarrow \frac{3}{5} = \frac{9}{x} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = 15$$

Εφαρμόζω Πυθαγόρειο Θεώρημα, επομένως:

$$\text{ΑΒ}^2 + \text{ΑΓ}^2 = \text{ΒΓ}^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \text{ΑΒ} = 12cm$$

2η περίπτωση

Έστω ότι η ΑΓ είναι η υποτείνουσα.

$$ημω = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{υποτείνουσα} \Leftrightarrow \frac{3}{5} = \frac{x}{9} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = 5,4$$

Εφαρμόζω Πυθαγόρειο Θεώρημα, επομένως:

$$\text{ΑΒ}^2 + \text{ΒΓ}^2 = \text{ΑΓ}^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \text{ΑΒ} = 7,2cm$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

$$εφω = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{15} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = 5\sqrt{3}m$$

Άρα το ύψος του δέντρου είναι: $υ = 5\sqrt{3} + 1,5 = 5\left(\sqrt{3} + 0,5\right)m$.

ΑΣΚΗΣΗ 3

α. $\eta\mu 150^0=\eta\mu\left(180^0-150^0\right)=\eta\mu 30^0=\frac{1}{2}$

$\sigma\upsilon\nu 150^0=-\sigma\upsilon\nu\left(180^0-150^0\right)=-\sigma\upsilon\nu 30^0=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\varepsilon\varphi 150^0=-\varepsilon\varphi\left(180^0-150^0\right)=-\varepsilon\varphi 30^0=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

β. $\eta\mu 120^0=\eta\mu\left(180^0-120^0\right)=\eta\mu 60^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sigma\upsilon\nu 120^0=-\sigma\upsilon\nu\left(180^0-120^0\right)=-\sigma\upsilon\nu 60^0=-\frac{1}{2}$

$\varepsilon\varphi 120^0=-\varepsilon\varphi\left(180^0-120^0\right)=-\varepsilon\varphi 60^0=-\sqrt{3}$

ΑΣΚΗΣΗ 4

$\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1\Leftrightarrow\left(\frac{3}{5}\right)^2+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\omega=\pm\frac{4}{5}$

Οπότε διακρίνουμε περιπτώσεις, αν

$\hat{\omega}$: οξεία, $\sigma\upsilon\nu\omega>0$ και $\varepsilon\varphi\omega=\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{4}$,

ενώ αν $\hat{\omega}$: αμβλεία, $\sigma\upsilon\nu\omega<0$ και $\varepsilon\varphi\omega=\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}=\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4}$.

ΑΣΚΗΣΗ 5

α. $\eta\mu^4x-\sigma\upsilon\nu^4x=\left(\eta\mu^2x-\sigma\upsilon\nu^2x\right)\left(\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x\right)=\eta\mu^2x-\sigma\upsilon\nu^2x$.

Όμως για $\eta\mu^2x=1-\sigma\upsilon\nu^2x$ έχουμε

$\eta\mu^2x-\sigma\upsilon\nu^2x=\left(1-\sigma\upsilon\nu^2x\right)-\sigma\upsilon\nu^2x=1-2\sigma\upsilon\nu^2x$,

ενώ για $\sigma\upsilon\nu^2x=1-\eta\mu^2x$ έχουμε $\eta\mu^2x-\sigma\upsilon\nu^2x=\left(1-\eta\mu^2x\right)-\eta\mu^2x=1-2\eta\mu^2x$.

β. $\eta\mu^3\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta\left(1-\eta\mu^2\theta\right)=\eta\mu^3\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu^2\theta=\eta\mu^3\theta\cdot\sigma\upsilon\nu^3\theta$.

γ. $4x^2\cdot\sigma\upsilon\nu^2\theta\cdot\eta\mu^2\theta+x^2\cdot\sigma\upsilon\nu^4\theta-2x^2\cdot\sigma\upsilon\nu^2\theta\cdot\eta\mu^2\theta+x^2\cdot\eta\mu^4\theta=\ldots=$

$x^2\left(\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta\right)=x^2$

δ. $\left(\frac{\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta-1}{\eta\mu\theta}\right)\cdot\left(\frac{\sigma\upsilon\nu\theta+\eta\mu\theta-1}{\sigma\upsilon\nu\theta}\right)=\frac{\left(\sigma\upsilon\nu\theta+\eta\mu\theta\right)^2-1}{\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\eta\mu\theta}$

$=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta+2\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\eta\mu\theta+\eta\mu^2\theta-1}{\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\eta\mu\theta}=2$

ε. $\eta\mu^4a-2\sigma\upsilon\nu^2a\cdot\eta\mu^2a+\sigma\upsilon\nu^4a+4\sigma\upsilon\nu^2a\cdot\eta\mu^2a=\left(\sigma\upsilon\nu^2a+\eta\mu^2a\right)^2=1$.

ΑΣΚΗΣΗ 6

α. $\mathrm{AB}=\mathrm{AM}+\mathrm{MB}\Leftrightarrow 5=\mathrm{AM}+2\Leftrightarrow 5-2=\mathrm{AM}\Leftrightarrow \mathrm{AM}=3cm$

$$\varepsilon\varphi\theta=\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{AM}}\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\theta=\frac{5}{3}$$

β. Οι γωνίες είναι παραπληρωματικές, άρα $\varepsilon\varphi\omega=-\varepsilon\varphi\theta=-\frac{5}{3}$.

ΑΣΚΗΣΗ 7

Αν $\varepsilon\varphi\omega=2\Leftrightarrow \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}=2\Leftrightarrow \eta\mu\omega=2\sigma\upsilon\nu\omega$ (1), οπότε:

$$\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1\Leftrightarrow (2\sigma\upsilon\nu\omega)^2+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1\Leftrightarrow \ldots\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\omega=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Επειδή $\omega:\text{οξεία}$, τότε $\sigma\upsilon\nu\omega>0$ και η (1) γίνεται: $\eta\mu\omega=2\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Άρα $\mathrm{A}=2\eta\mu^2\omega-3\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega+7\sigma\upsilon\nu^2\omega=2\cdot\frac{4}{5}-3\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}+7\cdot\frac{1}{5}=\frac{9}{5}$.

ΑΣΚΗΣΗ 8

Αφού $4\eta\mu^2\omega-4\eta\mu\omega+1=0\Leftrightarrow (2\eta\mu\omega-1)^2=0\Leftrightarrow \eta\mu\omega=\frac{1}{2}$, έχουμε:

$$\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1\Leftrightarrow \ldots\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\omega=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Επειδή $\omega:\text{οξεία}$, τότε $\sigma\upsilon\nu\omega>0$ και $\varepsilon\varphi\omega=\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$$\mathrm{A}=\frac{4\eta\mu\omega-\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\omega}{1-2\sqrt{3}\varepsilon\varphi\omega}=\frac{4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1-2\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}=\ldots=\frac{1}{6}$$

ΑΣΚΗΣΗ 9

α. $\hat{\mathrm{A}}+\hat{\mathrm{B}}+\hat{\Gamma}=180^0\Leftrightarrow \hat{\mathrm{A}}+\hat{\mathrm{A}}=180^0\Leftrightarrow 2\hat{\mathrm{A}}=180^0\Leftrightarrow \hat{\mathrm{A}}=90^0$

Άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, με υποτείνουσα την ΒΓ.

Εφαρμόζω Πυθαγόρειο Θεώρημα:

$\mathrm{AB}^2+\mathrm{A\Gamma}^2=\mathrm{B\Gamma}^2\Leftrightarrow \ldots\Leftrightarrow \mathrm{A\Gamma}=\sqrt{21}cm$

β. Οι γωνίες είναι παραπληρωματικές, άρα οι τριγωνομετρικοί αριθμοί υπολογίζονται ως εξής:

$\eta\mu\varphi=\eta\mu\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B}=\frac{2}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\varphi=-\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B}=-\frac{\sqrt{21}}{5}$ και $\varepsilon\varphi\varphi=-\varepsilon\varphi\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B}=-\frac{2\sqrt{21}}{21}$.

«ΤΡΙΓΩΝΑ»

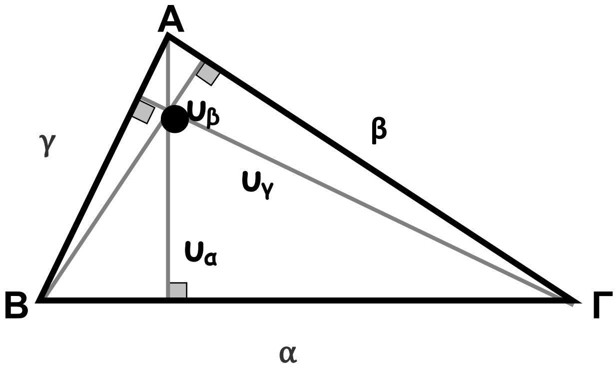
Α. Ερωτήσεις Σωστού- Λάθος

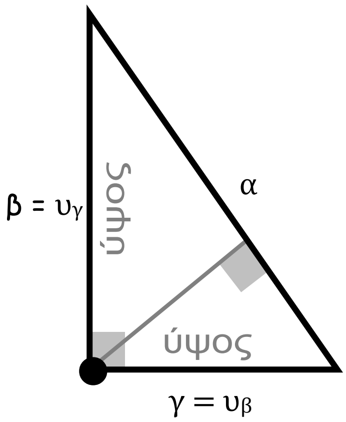
α. Λάθος
β. Λάθος
γ. Λάθος
δ. Λάθος
ε. Σωστό
στ. Σωστό
ζ. Λάθος
η. Λάθος
θ. Σωστό
ι. Λάθος

Β. Θέματα ανάπτυξης

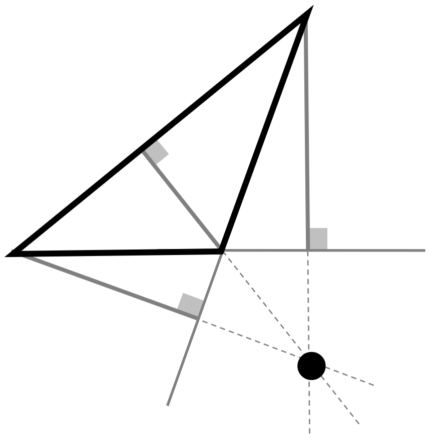
<u>ΑΣΚΗΣΗ 1</u>

α. Τα ύψη του οξυγώνιου τριγώνου τέμνονται όλα σε ένα σημείο εσωτερικό του τριγώνου, το οποίο ονομάζεται ορθόκεντρο.





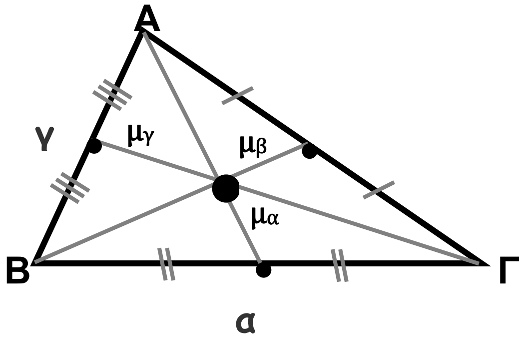
β. Στο **ορθογώνιο** τρίγωνο τα ύψη που φέρνουμε προς τις κάθετες πλευρές του είναι οι… ίδιες οι κάθετες πλευρές του. Άρα, το ορθόκεντρο του τριγώνου είναι η κορυφή της ορθής γωνίας.

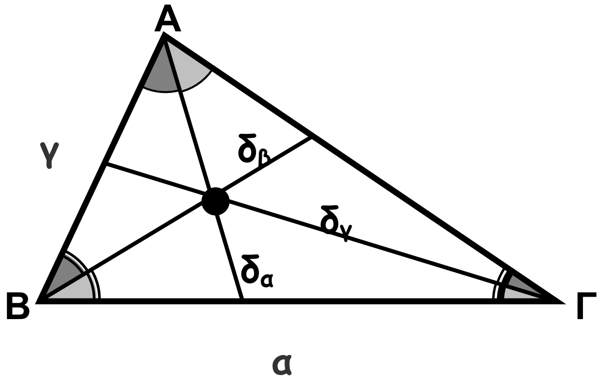


γ. Τα ύψη που φέρνουμε από τις κορυφές των οξειών γωνιών πέφτουν εκτός τριγώνου. Γι’ αυτό, προκειμένου να τα σχεδιάσουμε χρειάζεται να προεκτείνουμε τις 2 πλευρές του. Τελικά, το ορθόκεντρο είναι εξωτερικό του τριγώνου.

<u>ΑΣΚΗΣΗ 2</u>

Το σημείο απ’ το διέρχονται και οι **3 διάμεσοι** ενός τριγώνου ονομάζεται βαρύκεντρο.





<u>ΑΣΚΗΣΗ 3</u>

Το σημείο απ’ το διέρχονται και οι **3 διχοτόμοι** ενός τριγώνου λέγεται έγκεντρο.

<u>ΑΣΚΗΣΗ 4</u>

Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ(ΑΒ=ΑΓ), φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ, έχουν:

- **i.** ΑΒ=ΑΓ (ισοσκελές τρίγωνο)
- **ii.** $B\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}M$ (ΑΔ διχοτόμος)
- **iii.** ΑΔ (κοινή πλευρά)

Άρα από (Π-Γ-Π), τα τρίγωνα είναι ίσα. Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες, άρα θα έχουν και:

- **i.** $\hat{B} = \hat{\Gamma}$
- **ii.** ΒΔ=ΔΓ
- **iii.** $B\hat{\Delta}A = A\hat{\Delta}\Gamma$.

<u>ΑΣΚΗΣΗ 5</u>

$\Rightarrow$ Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, φέρουμε τη μεσοκάθετο (ε) και σημείο Σ της μεσοκαθέτου. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΣΜ και ΣΜΒ, έχουν:

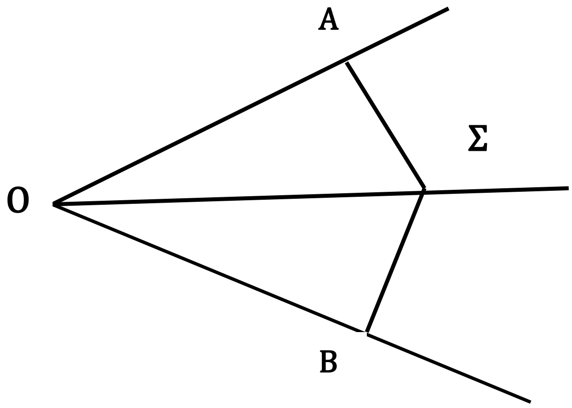
i. ΑΜ=ΜΒ (Μ μέσο) **ii.** ΣΜ (κοινή πλευρά)

Άρα από κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων, τα τρίγωνα είναι ίσα. Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες, άρα θα έχουν και:

i. $A\hat{\Sigma}M = M\hat{\Sigma}B$ **ii.** $\hat{A} = \hat{B}$ **iii.** ΣΑ=ΣΒ.

$\Leftarrow$Αν ΣΑ=ΣΒ, το τρίγωνο ΑΣΒ είναι ισοσκελές, άρα η ΣΜ θα είναι διάμεσος, διχοτόμος και ύψος.

ΑΣΚΗΣΗ 6



Συγκρίνουμε τα ορθογώνια (η **απόσταση** ενός σημείου από μια ευθεία είναι το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα) τρίγωνα ΑΟΣ και ΟΣΒ, έχουν:

i. ΟΣ (κοινή πλευρά) ii. $\mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\Sigma = \Sigma\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B}$ (διχοτόμος)

Άρα από τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων, τα τρίγωνα είναι ίσα. Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες, άρα θα έχουν και:

i. $\mathrm{O}\hat{\mathrm{A}}\Sigma = \mathrm{O}\hat{\mathrm{B}}\Sigma$ ii. ΣΑ=ΣΒ iii. $\mathrm{OA} = \mathrm{OB}$

ΑΣΚΗΣΗ 7

i. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΜ και Α’ Β΄Μ΄, έχουν:

i. ΑΒ=Α’ Μ΄ (δεδομένο) ii. ΑΜ=Α΄Μ΄ (δεδομένο) iii. $\mathrm{BM} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2} = \frac{\mathrm{B'\Gamma'}}{2} = \mathrm{B'M'}$

Άρα από (Π-Π-Π), τα τρίγωνα είναι ίσα. Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες, άρα θα έχουν και:

i. $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{M} = \mathrm{B'}\hat{\mathrm{A}}'\mathrm{M'}$ ii. $\mathrm{A}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{B} = \mathrm{A'}\hat{\mathrm{M}}'\mathrm{B'}$ iii. $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\mathrm{B}}'$

ii. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α’ Β΄Γ΄, έχουν:

i. ΑΒ=Α’ Β΄ (δεδομένο) ii. $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\mathrm{B}}'$ (ερώτημα α) iii. ΒΓ= Β΄Γ΄

Άρα από (Π-Γ-Π), τα τρίγωνα είναι ίσα.

ΑΣΚΗΣΗ 8

α. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΓΝ, έχουν:

i. ΑΜ=ΜΝ (δεδομένο) **ii.** $\mathrm{A\hat{M}B} = \mathrm{\Gamma\hat{M}N}$ (κατακορυφήν) **iii.** ΒΜ=ΜΓ (δεδομένο)

Άρα από (Π-Γ-Π), τα τρίγωνα είναι ίσα. Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες, άρα θα έχουν και:

i. $\mathrm{A\hat{B}M} = \mathrm{M\hat{\Gamma}N}$ **ii.** $\mathrm{B\hat{A}M} = \mathrm{M\hat{N}\Gamma}$ **iii.** ΑΒ=ΓΝ.

β. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΒΜΝ και ΑΜΓ, έχουν:

i. ΜΝ=ΑΜ (δεδομένο) **ii.** $\mathrm{B\hat{M}N} = \mathrm{A\hat{M}\Gamma}$ (κατακορυφήν) **iii.** ΜΓ=ΒΜ (δεδομένο)

Άρα από (Π-Γ-Π), τα τρίγωνα είναι ίσα. Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες, άρα θα έχουν και:

i. $\mathrm{M\hat{B}N} = \mathrm{A\hat{\Gamma}M}$ **ii.** ΒΝ=ΑΓ **iii.** $\mathrm{B\hat{N}M} = \mathrm{M\hat{A}\Gamma}$.

ΑΣΚΗΣΗ 9

α. Σε ισοσκελές τρίγωνο φέρουμε τις διαμέσους ΒΜ και ΓΝ. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΑΝΓ, έχουν:

i. ΑΒ=ΑΓ (Ισοσκελές)
ii. ΑΜ=ΒΝ (μισά ίσων πλευρών)
iii. $\hat{\mathrm{A}}$ κοινή γωνία, άρα τα τρίγωνα είναι ίσα. Επομένως, ΒΜ=ΝΓ.

β. Σε ισοσκελές τρίγωνο φέρουμε τα ύψη ΒΚ και ΓΛ. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΚ και ΑΓΛ, έχουν:

i. ΑΒ=ΑΓ (Ισοσκελές)
ii. $\hat{\mathrm{A}}$ κοινή γωνία, άρα τα τρίγωνα είναι ίσα.
Επομένως, ΒΚ=ΓΛ.

γ. Σε ισοσκελές τρίγωνο φέρουμε τις διχοτόμους ΒΔ και ΓΕ. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ, έχουν:

i. ΑΒ=ΑΓ (Ισοσκελές)
ii. $\hat{\mathrm{B}}_1 = \hat{\Gamma}_1$ (μισά ίσων γωνιών)
iii. $\hat{\mathrm{A}}$ κοινή γωνία, άρα τα τρίγωνα είναι ίσα. Επομένως, ΒΔ=ΓΕ.

«ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ & ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ»

Α. Ερωτήσεις Σωστού- Λάθος

α. Σωστό
β. Λάθος
γ. Λάθος
δ. Λάθος
ε. Σωστό

Β. Θέματα ανάπτυξης

ΑΣΚΗΣΗ 1

α. $\Pi = AB + A\Gamma + B\Gamma \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = 5$.

Άρα για $x = 5$ έχουμε: $AB = 12$, $A\Gamma = 16$, $B\Gamma = 20$.

β. Εφαρμόζουμε αντίστροφο του Πυθαγορείου:

$B\Gamma^2 = 20^2 = 400$,

$AB^2 + A\Gamma^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400$, άρα είναι ορθογώνιο με ορθή γωνία $\hat{A}$.

γ. $(AB\Gamma) = \dfrac{AB \cdot A\Gamma}{2} = \dfrac{12 \cdot 16}{2} = 96$.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Εφαρμόζω Πυθαγόρειο θεώρημα, έχουμε: $AE^2 + \Delta E^2 = A\Delta^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = 12cm$

Άρα $EB^2 + \Delta E^2 = B\Delta^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \Delta B = 20cm$.

ΑΣΚΗΣΗ 3

α. Εφαρμόζω Πυθαγόρειο θεώρημα, έχουμε:

$\Gamma\Lambda^2 + \Delta\Lambda^2 = \Gamma\Delta^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \Gamma\Lambda = 6$. Άρα $\Gamma\Lambda = BK = 6$.

β. $(AB\Gamma\Delta) = \dfrac{(A\Delta + B\Gamma) \cdot BK}{2} = \dfrac{(24+8) \cdot 6}{2} = 96$.

γ. $K\Lambda^2 + \Gamma\Lambda^2 = \Gamma K^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \Gamma K = 10$.

δ. $(AB\Gamma\Delta) = BK \cdot K\Lambda = 6 \cdot 8 = 48$.

ε. Εφαρμόζουμε αντίστροφο του Πυθαγορείου:

$B\Gamma^2 = 20^2 = 400$,$K\Delta^2 + \Gamma\Delta^2 = 10^2 + 10^2 = 100 + 100 = 200$,

άρα δεν είναι ορθογώνιο.

ΑΣΚΗΣΗ 4

α. Εφαρμόζω Πυθαγόρειο θεώρημα, έχουμε:

$E\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 = \Delta E^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \Gamma E = 9$.

β. Εφαρμόζω Πυθαγόρειο θεώρημα, έχουμε:

Εφαρμόζουμε αντίστροφο του Πυθαγορείου:

$A\Delta^2 = 25^2 = 625$, $AE^2 + E\Delta^2 = 20^2 + 15^2 = 400 + 225 = 625$,

άρα δεν είναι ορθογώνιο.

«ΟΜΟΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ»

Α. Ερωτήσεις Σωστού- Λάθος

α. Λάθος
β. Σωστό
γ. Λάθος
δ. Σωστό
ε. Σωστό
στ. Λάθος

Β. Θέματα ανάπτυξης

ΑΣΚΗΣΗ 1

α. Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ:

1) $\hat{A}$ (κοινή γωνία)
2) $\hat{E}=\hat{\Gamma}$ (δεδομένο)
3) $\hat{\Delta}=\hat{B}$ (άθροισμα γωνιών τριγώνου)

Τα τρίγωνα είναι όμοια, άρα προκύπτουν οι παρακάτω λόγοι ομοιότητας:

$$\frac{\Delta E}{B\Gamma}=\frac{A\Delta}{AB}=\frac{AE}{A\Gamma}$$

Άρα έχουμε: $\frac{6}{6+x}=\frac{9}{12}\Leftrightarrow 9(6+x)=72\Leftrightarrow \ldots\Leftrightarrow x=2$.

β. Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ:

1) $\hat{A}$ (κοινή γωνία)
2) $\hat{E}=\hat{\Gamma}$ (δεδομένο)
3) $\hat{\Delta}=\hat{B}$ (άθροισμα γωνιών τριγώνου)

Τα τρίγωνα είναι όμοια, άρα προκύπτουν οι παρακάτω λόγοι ομοιότητας:

$$\frac{\Delta E}{B\Gamma}=\frac{A\Delta}{AB}=\frac{AE}{A\Gamma}$$

Άρα έχουμε: $\frac{10-x}{x}=\frac{8}{12}\Leftrightarrow 12(10-x)=8x\Leftrightarrow \ldots\Leftrightarrow x=6$.

γ. Συγκρίνω τα τρίγωνα ΓΔΕ και ΒΓΑ:

1) $\hat{\Gamma}$ (κοινή γωνία)
2) $\hat{E}=\hat{A}$ (δεδομένο)
3) $\hat{\Delta}=\hat{B}$ (άθροισμα γωνιών τριγώνου)

Τα τρίγωνα είναι όμοια, άρα προκύπτουν οι παρακάτω λόγοι ομοιότητας:

$$\frac{\Delta E}{AB}=\frac{\Gamma\Delta}{B\Gamma}=\frac{E\Gamma}{A\Gamma}$$

Άρα έχουμε: $\frac{x}{x+4}=\frac{9}{9+x}\Leftrightarrow x^2+9x=9x+36\Leftrightarrow \ldots\Leftrightarrow x=6$.

ΑΣΚΗΣΗ 2

α. Συγκρίνω τα τρίγωνα ΒΕΖ και ΑΔΒ:

1) $\hat{\mathrm{B}}$ (κοινή γωνία)
2) $\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta$ (ως εντός, εκτός κι επί τα αυτά μέρη)
3) $\mathrm{E}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B} = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}$ (άθροισμα γωνιών τριγώνου)

Τα τρίγωνα είναι όμοια, άρα προκύπτουν οι παρακάτω λόγοι ομοιότητας:

$$\frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{A}\Delta} = \frac{\mathrm{ZB}}{\mathrm{B}\Delta} = \frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{AB}}$$

Άρα έχουμε: $\dfrac{10}{10+x} = \dfrac{15}{15+(x+3)} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = 6$.

β. Συγκρίνω τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΑΒΓ:

1) $\hat{\mathrm{B}}$ (κοινή γωνία)
2) $\mathrm{B}\hat{\Delta}\mathrm{E} = \mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{A}$ (ως εντός, εκτός κι επί τα αυτά μέρη)
3) $\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Delta = \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$ (άθροισμα γωνιών τριγώνου)

Τα τρίγωνα είναι όμοια, άρα προκύπτουν οι παρακάτω λόγοι ομοιότητας:

$$\frac{\Delta\mathrm{E}}{\mathrm{A}\Gamma} = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{B}\Delta}{\mathrm{B}\Gamma}$$

Άρα έχουμε: $\dfrac{15}{15+(x+3)} = \dfrac{10+x}{10+x+y} \Leftrightarrow \dfrac{15}{24} = \dfrac{16}{16+y} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow y = 9,6$.

ΑΣΚΗΣΗ 3

i. Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΑ:

1) $\hat{\mathrm{A}}$ (κοινή γωνία)
2) $\hat{\mathrm{E}} = \hat{\Gamma}$ (ως εντός, εκτός κι επί τα αυτά μέρη)
3) $\hat{\Delta} = \hat{\mathrm{B}}$ (άθροισμα γωνιών τριγώνου)

ii. $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A}\Delta} = \dfrac{\mathrm{B}\Gamma}{\Delta\mathrm{E}} = \dfrac{\mathrm{A}\Gamma}{\mathrm{AE}}$.

iii. Είναι λάθος γιατί το ευθύγραμμο τμήμα ΒΔ, δεν είναι πλευρά των όμοιων τριγώνων. Από τους λόγους παραπάνω, έχουμε:

$\dfrac{x}{6} = \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow 4x = 54 \Leftrightarrow 4x = 54 \Leftrightarrow x = 13,5$.

ΑΣΚΗΣΗ 4

α. Συγκρίνω τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΑΒΓ:

1) $\hat{\mathrm{A}}$ (κοινή γωνία)
2) $\hat{\Delta} = \hat{\mathrm{B}} = 90^0$
3) $\hat{\mathrm{E}} = \hat{\Gamma}$ (άθροισμα γωνιών τριγώνου)

Τα τρίγωνα είναι όμοια, άρα προκύπτουν οι παρακάτω λόγοι ομοιότητας:

$$\frac{\Delta\mathrm{E}}{\mathrm{B}\Gamma} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{A}\Gamma} = \frac{\mathrm{A}\Delta}{\mathrm{AB}}$$

Άρα έχουμε: $\dfrac{y}{5} = \dfrac{s}{20} \Leftrightarrow 20y = 5s \Leftrightarrow y = \dfrac{s}{4}$.

β. Για $y = 2$, $s = 8$.

«ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ ΠΟΥ ΤΕΜΝΟΝΤΑΙ ΑΠΟ ΜΙΑ ΤΡΙΤΗ»

Θέματα ανάπτυξης

ΑΣΚΗΣΗ 1

α. $\hat{\beta}=40^0$ (κατακορυφήν), $\hat{\alpha}=60^0$ (ως εντός εναλλάξ)

β. $\hat{\gamma}=\hat{\beta}=40^0$ (ως εντός εναλλάξ), $\hat{\delta}+\hat{\alpha}=180^0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \hat{\delta}=120^0$.

γ. Από άθροισμα γωνιών τριγώνου, έχουμε: $\hat{\kappa}+\hat{\alpha}+\hat{\gamma}=180^0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \hat{\kappa}=60^0$.

ΑΣΚΗΣΗ 2

α. $\hat{\alpha}=40^0$ (κατακορυφήν), $\hat{\alpha}+\hat{\beta}=180^0 \Leftrightarrow \hat{\beta}=140^0$, $\hat{\gamma}=30^0$ (ως εντός εναλλάξ)

β. $\hat{\alpha}+\hat{\gamma}+\hat{\delta}=180^0 \Leftrightarrow \hat{\delta}=180^0-40^0-30^0 \Leftrightarrow \hat{\delta}=110^0$, $\hat{\varepsilon}=\hat{\beta}$ (ως εντός, εκτός κι επί τα αυτά μέρη).

ΑΣΚΗΣΗ 3

α. $A\hat{B}\Gamma=58^0$ (ως εντός, εκτός κι επί τα αυτά μέρη),

$B\hat{A}\Gamma+A\hat{B}\Gamma+A\hat{\Gamma}B=180^0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow A\hat{\Gamma}B=32^0$

β. $\hat{\kappa}+A\hat{\Gamma}B=180^0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \hat{\kappa}=148^0$ (ως εντός κι επί τα αυτά μέρη)

γ. $\hat{\varphi}=A\hat{\Gamma}B$ (κατακορυφήν)

ΑΣΚΗΣΗ 4

α. $2\hat{x}+\hat{x}=180^0 \Leftrightarrow 3\hat{x}=180^0 \Leftrightarrow \hat{x}=60^0$,

$\hat{x}+\hat{\psi}=90^0 \Leftrightarrow \hat{\psi}=90^0-60^0=30^0$ (συμπληρωματικές)

$\hat{x}+2\hat{\psi}+\hat{\alpha}=90^0 \Leftrightarrow \hat{\alpha}=180^0-120^0 \Leftrightarrow \hat{\alpha}=60^0$, $\hat{x}=\hat{\beta}=60^0$

β. Το τρίγωνο είναι ισόπλευρο και προφανώς οξυγώνιο.

«ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ»

Ερωτήσεις Σωστού- Λάθος

α. Σωστό
β. Σωστό
γ. Λάθος
δ. Λάθος
ε. Σωστό
στ. Λάθος
ζ. Λάθος
η. Σωστό
θ. Σωστό
ι. Σωστό
ια. Λάθος
ιβ. Λάθος
ιγ. Λάθος
ιδ. Σωστό
ιε. Σωστό
ιστ. Λάθος
ιζ. Λάθος
ιη. Λάθος
ιθ. Λάθος
κ. Σωστό

«ΟΜΟΙΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ»

Θέματα ανάπτυξης

ΑΣΚΗΣΗ 1

α. Τα πολύγωνα είναι όμοια, όταν έχουν γωνίες ίσες και πλευρές ανάλογες.

Επομένως, έχουμε: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{A\Delta}{A'\Delta'} \Leftrightarrow \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ δηλαδή είναι όμοια.

β. Τα πολύγωνα είναι όμοια, όταν έχουν γωνίες ίσες και πλευρές ανάλογες.

Επομένως, έχουμε: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{A\Delta}{A'\Delta'} \Leftrightarrow \frac{6}{3} = \frac{4}{2}$ δηλαδή είναι όμοια.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Γνωρίζουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο και ίσο με το μισό της τρίτης πλευράς. Άρα έχουμε:

Κ, Λ μέσο της ΟΑ, ΟΒ: $K\Lambda = \frac{AB}{2}$,

Κ, Ν μέσο της ΟΑ,ΟΔ: $KN = \frac{A\Delta}{2}$,

Ν, Μ μέσο της ΟΔ, ΟΓ: $NM = \frac{\Delta\Gamma}{2}$,

Μ, Λ μέσο της ΟΓ,ΟΒ: $\Lambda M = \frac{B\Gamma}{2}$ άρα είναι όμοια, καθώς έχουν τις πλευρές ανάλογες.

ΑΣΚΗΣΗ 3

$\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{20}{\Pi_2} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 2\Pi_2 = 60 \Leftrightarrow \Pi_2 = 30$.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Είναι όμοια, προκύπτει άμεσα από τις ιδιότητες των αναλογιών.

«ΚΥΚΛΟΣ»

Α. Ερωτήσεις Σωστού- Λάθος

α. Λάθος
β. Σωστό
γ. Λάθος
δ. Σωστό
ε. Λάθος
στ. Λάθος
ζ. Λάθος
η. Σωστό
θ. Σωστό
ι. Σωστό

Β. Θέματα ανάπτυξης

ΑΣΚΗΣΗ 1

Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των τόξων σε ένα κύκλο είναι 360°. Επομένως:

$AB+A\Gamma+B\Gamma=360^0 \Leftrightarrow 120^0+B\Gamma+80^0=360^0 \Leftrightarrow B\Gamma=160^0$

Η γωνία A είναι εγγεγραμμένη και βαίνει στο τόξο $B\Gamma=160^0$, άρα $A=80^0$.

Η γωνία B είναι εγγεγραμμένη και βαίνει στο τόξο $A\Gamma=80^0$, άρα $B=40^0$.

Η γωνία Γ είναι εγγεγραμμένη και βαίνει στο τόξο $AB=120^0$, άρα $\Gamma=60^0$.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Η $\Delta=110^0$ και είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο $AB\Gamma$, άρα $AB\Gamma=220^0$.

Άρα το τόξο ΒΓ: $AB+B\Gamma=AB\Gamma \Leftrightarrow 80^0+B\Gamma=220^0 \Leftrightarrow B\Gamma=140^0$,
Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των τόξων σε ένα κύκλο είναι 360°. Επομένως:

$AB+B\Gamma+\Gamma\Delta+\Delta A=360^0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \Gamma\Delta=80^0$.

Επομένως, φ είναι εγγεγραμμένη και βαίνει στο τόξο $B\Gamma=140^0$, άρα $\varphi=70^0$.

Η ω είναι εγγεγραμμένη και βαίνει στο τόξο $A\Delta\Gamma=140^0$, άρα $\omega=70^0$.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Τα τόξα έχουν άθροισμα: $A\Gamma+B\Gamma=180^0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow B\Gamma=60^0$,

$A\Gamma=120^0$.

Επομένως, η γωνία $A=30^0$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο $B\Gamma=60^0$.

Η γωνία $B=60^0$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο $A\Gamma=120^0$.
Η πλευρά ΒΓ=10 cm, καθώς το τρίγωνο ΟΓΒ είναι ισόπλευρο. Εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα και έχουμε:

$A\Gamma^2=AB^2-B\Gamma^2 \Rightarrow .... \Rightarrow A\Gamma=10\sqrt{3}cm$

«ΤΥΠΟΙ ΓΙΑ ΤΟ ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ»

Α. Ερωτήσεις Σωστού- Λάθος

α. Σωστό
β. Σωστό
γ. Λάθος
δ. Λάθος
ε. Σωστό

Β. Θέματα ανάπτυξης

ΑΣΚΗΣΗ 1

Εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο θεώρημα και έχουμε:

$$\mathrm{A\Gamma}^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow \left(2\sqrt{7}\right)^2 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = 49 \Rightarrow x = 7,$$

άρα η περίμετρος και το εμβαδό είναι αντίστοιχα: $\Pi_{\mathrm{AB\Gamma\Delta}} = 4 \cdot \alpha = 4 \cdot 7 = 28$,

$$\mathrm{E}_{\mathrm{AB\Gamma\Delta}} = \alpha^2 = 7^2 = 49.$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

α. Η περίμετρος του σχήματος είναι το άθροισμα όλων των πλευρών, άρα:
$\Pi = 1+1+1+4+1+2+1+3 = 14$.

β. Το εμβαδόν προκύπτει ως άθροισμα των δύο ορθογωνίων:
$\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2 = \beta_1 \cdot \upsilon_1 + \beta_2 \cdot \upsilon_2 = 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 7$.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Τα σχήματα είναι ισεμβαδικά, σημαίνει ότι έχουν ίδιο εμβαδόν.
Άρα, υπολογίζουμε το εμβαδόν του ορθογωνίου και αντίστοιχα θα είναι ίδιο και για το εμβαδόν του τετραγώνου. Συνεπώς,

$\mathrm{E}_{\text{ορθογωνίου}} = \alpha \cdot \beta = 2 \cdot 8 = 16$ και $\mathrm{E}_{\text{τετραγώνου}} = \alpha^2 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Η σωστή απάντηση είναι το (γ), καθώς τα τρίγωνα έχουν ίδια βάση και ίσα τα αντίστοιχα ύψη τους.

ΑΣΚΗΣΗ 5

$$\mathrm{E} = \mathrm{E}_{\text{ορθογωνίου}} + \mathrm{E}_{\text{τραπεζίου}} - \mathrm{E}_{\text{τριγώνου}} = \alpha \cdot \beta + \frac{(\mathrm{B}+\beta)\cdot\upsilon}{2} - \frac{\beta \cdot \upsilon}{2} = 30,75.$$

Επιμέλεια: Ζεππάτου Κατερίνα
Οικονομόπουλος Αναστάσιος
Ρούτης Κωνσταντίνος