



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Βλέπε σελ.253 του σχολικού βιβλίου.

A2. Βλέπε σελ.191 του σχολικού βιβλίου.

A3. Βλέπε σελ.258 του σχολικού βιβλίου.

A4.

α) → Σωστό

β) → Σωστό

γ) → Λάθος

δ) → Λάθος

ε) → Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1. $|z-1|^2 + |z-1|^2 = 4$

$$|w - 5\bar{w}| = 12$$

$$(z-1)(\bar{z}-1) + (z+1)(\bar{z}+1) = 4 \Leftrightarrow z\bar{z} - z - \bar{z} + 1 + z\bar{z} + z + \bar{z} + 1 = 4 \Leftrightarrow$$

$$2|z|^2 = 2 \Leftrightarrow |z| = 1$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

B2.

α' τρόπος:

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 = \sqrt{2}^2 \Leftrightarrow (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = 2 \Leftrightarrow$$

$$z_1 \bar{z}_1 - z_1 \bar{z}_2 - z_2 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 = 2 \Leftrightarrow$$

$$1 - z_1 \bar{z}_2 - z_2 \bar{z}_1 + 1 = 2 \Leftrightarrow z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 = 0 \quad (1)$$

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 =$$

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 \stackrel{(1)}{=} 1 + 1 + 0 = 2$$

$$|z_1 + z_2| = \sqrt{2}$$

β' τρόπος (γεωμετρικός):

Αν $|z_1 + z_2| = x$ από τη γεωμετρική απεικόνιση

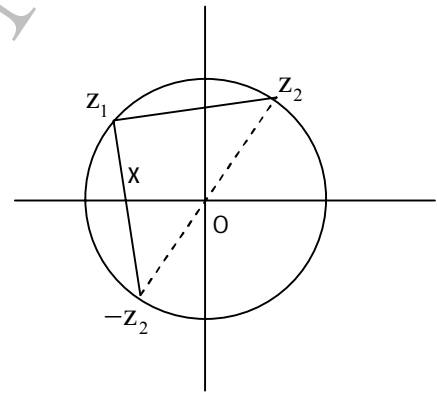
των μιγαδικών έχουμε :

$$x^2 + |z_1 - z_2|^2 = (2R)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 2 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

$$\text{Άρα } |z_1 + z_2| = \sqrt{2}$$



B3.

α' τρόπος:

$$\text{Έστω } w = x + yi, x, y \in \mathbb{R} \quad |w - 5\bar{w}| = 12 \Rightarrow$$

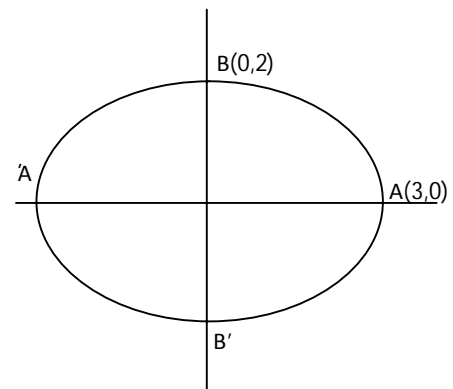
$$\Rightarrow |x + yi - 5x + 5yi| = 12 \Rightarrow |-4x + 6yi| = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{16x^2}{144} + \frac{36y^2}{144} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$|w|_{\text{μεγ}} = 3$$

$$|w|_{\text{ελ}} = 2$$

$$2 \leq |w| \leq 3$$



☞ **β' τρόπος:**

$$|w - 5\bar{w}| = 12 \Rightarrow |w - 5\bar{w}|^2 = 12^2 \Rightarrow (w - 5\bar{w})(w + 5\bar{w}) = 144 \Rightarrow$$
$$w\bar{w} - 5w^2 - 5\bar{w}^2 + 25w\bar{w} = 144 \Rightarrow 26|w|^2 - 5(w^2 + \bar{w}^2) = 144$$

$$26|w|^2 - 5(w + \bar{w})^2 + 10w\bar{w} = 144 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36|w|^2 - 5(w + \bar{w})^2 = 144 \stackrel{w=x+yi}{\Rightarrow} 36x^2 + 36y^2 - 20x^2 = 144$$

$$\Rightarrow \frac{16x^2}{144} + \frac{36y^2}{144} = \frac{144}{144} \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1(1)$$

Δηλαδή ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w είναι έλλειψη με εξίσωση την (1).

B4.

☞ **α' τρόπος:**

$$\text{Έχουμε } |z| = 1 \text{ και } |z - w| \leq |z| + |w| = 1 + 3 = 4(1)$$

$$|z - w| \geq ||z| - |w|| = |1 - 3| = 2(2)$$

$$\text{Έχω } |w| \geq 2 \Rightarrow -|w| \leq -2 \Rightarrow 1 - |w| \leq 1 - 2 \Rightarrow 1 - |w| \leq -1 \Rightarrow$$

$$|1 - |w|| \geq |-1| \Rightarrow |1 - |w|| \geq 1(3)$$

Άρα από τις (2), (3) έχουμε $|z - w| \geq 1$

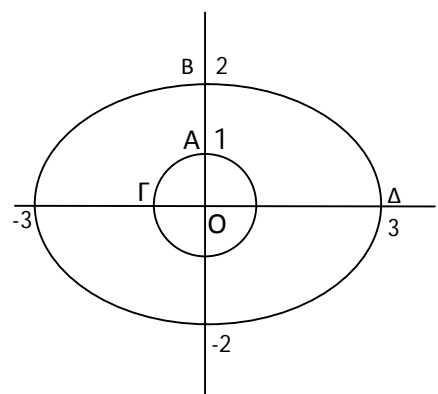
Και λόγω της (1) θα έχουμε τελικά $1 \leq |z - w| \leq 4$.

☞ **β' τρόπος:**

$$\text{Είναι } |z - w|_{\min} = (AB) = 2 - 1 = 1 \text{ και}$$

$$|z - w|_{\max} = (\Gamma\Delta) = 3 + 1 = 4$$

$$\text{Άρα } 1 \leq |z - w| \leq 4$$



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο A_f με

$$f'(x) = \ln x + \frac{x-1}{x} = \ln x + 1 - \frac{1}{x}.$$

Η $f'(x) = 0$ για την προφανή ρίζα $x=1$ που

είναι και μοναδική γιατί $f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$

στο $(0, +\infty)$ δηλαδή η $f'(x)$ γνησίως άυξουσα.

Οπότε για την f έχουμε:

$$\text{Γιατί } f'(e) = 1 + \frac{e-1}{e} > 0 \quad f'\left(\frac{1}{e}\right) = -1 + 1 - e < 0$$

Οπότε για $x \in (0, 1]$ η f γνησίως φθίνουσα και στο $[1, +\infty)$ η f γνησίως αύξουσα:

Για το σύνολο τιμών της f :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [(x-1)\ln x - 1] = +\infty \\ f(1) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x-1)\ln x - 1] = +\infty \end{array} \right\} \text{Άρα το σύνολο τιμών της } f \text{ είναι το } [-1, +\infty).$$

Γ2. Η $x^{x-1} = e^{2013}$ (I) είναι ισοδύναμη με την:

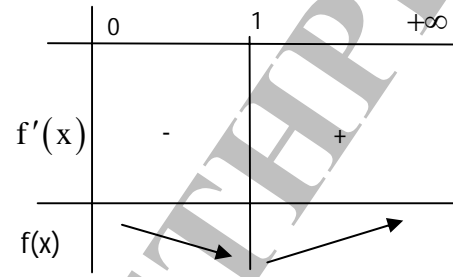
$(x-1)\ln x = 2013 \Rightarrow (x-1)\ln x - 1 = 2012 \Rightarrow f(x) = 2012$ που από το σύνολο τιμών της f ανά διάστημα μονοτονίας έχουμε ότι παίρνει την τιμή 2012 2 φορές ακριβώς μια για $x_1 \in (0, 1)$ και μία για $x_2 \in (1, +\infty)$ άρα η (I) έχει 2 ακριβώς λύσεις θετικές.

Γ3. Έστω η $h(x) = e^x \cdot f(x) - e^x \cdot 2012$ στο $[x_1, x_2]$

- ☒ Η $h(x)$ είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$.
- ☒ Η $h(x)$ παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) .
- ☒ $h(x_1) = e^{x_1} (f(x_1) - 2012) = 0 = h(x_2)$

Άρα από Θεώρημα Rolle για την $h(x)$ στο $[x_1, x_2]$ έχουμε ότι υπάρχει

$$x_0 \in (x_1, x_2) : h'(x_0) = 0 \text{ δηλαδή } f'(x_0) + f(x_0) = 2012.$$



Γ4. Έχουμε από Γ1 ότι $f(x) \geq -1$ άρα $f(x)+1 \geq 0$ δηλαδή $g(x) \geq 0$.

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Οπότε θέλουμε το:

$$\begin{aligned} E(C_g, xx', x=e, x=1) &= \int_1^e (f(x)+1) dx = \int_1^e (x-1) \ln x dx \\ &= \int_1^e \left(\frac{(x-1)^2}{2} \right)' \ln x dx = \left[\frac{(x-1)^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{(x-1)^2}{2x} dx = \frac{(e-1)^2}{2} - \int_1^e \frac{x^2 - 2x + 1}{2x} dx \\ &= \frac{(e-1)^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4} - x + \frac{1}{2} \ln x \right]_1^e = \frac{(e-1)^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - e + \frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{e^2 - 3}{4}. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

✎ Για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) \neq 0$ και συνεχής, οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο.

✎ Για την $g(x) = \int_1^{x^2-x+1} f(t) dt - \frac{x-x^2}{e}$,

Έχουμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με:

$$g'(x) = f(x^2-x+1)(x^2-x+1)' - \frac{1}{e}(x-x^2)' = f(x^2-x+1)(2x-1) - \frac{1}{e}(1-2x)$$

✎ Επίσης $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(1)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, δηλαδή στο εσωτερικό σημείο $x_0 = 1$ του $(0, +\infty)$ παρουσιάζει ελάχιστο, οπότε, από Fermat

$$\text{προκύπτει ότι: } g'(1) = 0 \Leftrightarrow f(1) - \frac{1}{e}(-1) = 0 \Leftrightarrow f(1) = -\frac{1}{e} < 0,$$

οπότε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

✎ Για την $Q(x) = \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt$ έχουμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$Q'(x) = \frac{\ln x - x}{f(x)}$$

☞ Η $z(x) = \ln x - x$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με:

$$z'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

$$z'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	0	1	$+\infty$
$z'(x)$		+	-
$z(x)$		μ	

Στο 1 παρουσιάζει μέγιστο, άρα

$$z(x) \leq z(1) \Leftrightarrow z(x) \leq -1, \text{ άρα } z(x) < 0$$

☞ Οπότε $\int_1^x \frac{\ln t - 1}{f(t)} dt + e > 0$ για κάθε $x > 0$.

Τελικά $f(x) = \frac{\ln x - x}{\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e\right)}$ που είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο

παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

☞ Από τα παραπάνω $\frac{\ln x - x}{f(x)} = \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e$.

$$\text{Άρα: } \left(\frac{\ln x - x}{f(x)}\right)' = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e\right)'$$

$$\left(\frac{\ln x - x}{f(x)}\right)' = \frac{\ln x - x}{f(x)}$$

$$\text{Άρα: } \frac{\ln x - x}{f(x)} = ce^x, c \in \mathbb{R}$$

☞ Για $x=1$ $\frac{-1}{-1} = ce \Leftrightarrow c = 1$ οπότε

$$\frac{\ln x - x}{f(x)} = e^x \Leftrightarrow e^x f(x) = (\ln x - x) \Rightarrow f(x) = e^{-x} (\ln x - x)$$

$$\Delta 2. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(f(x))^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{f(x)} - f(x) \right]$$

$$u = \frac{1}{f(x)} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{u} \quad \mu\epsilon \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} u = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)} = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{-x} (\ln x - x)) = -\infty.$$

$$\text{Τότε } \lim_{u \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta\mu u}{u^2} - \frac{1}{u} \right) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu u - u}{u^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu u - 1}{2u} = \frac{1}{2} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu u - 1}{u} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

Δ3.

$$\text{☒ } \ln x \leq x - 1, x > 0$$

$$\text{☒ } F'(x) = f(x) \quad F''(x) = f'(x)$$

$$\begin{aligned} \text{☒ } f'(x) &= (e^{-x} (\ln x - x))' = e^{-x} (-1) (\ln x - x) + e^{-x} \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \\ &= e^{-x} \left(-\ln x + x + \frac{1}{x} - 1 \right) = e^{-x} \left((-\ln x + x - 1) + \frac{1}{x} \right) > 0 \end{aligned}$$

Άρα $F''(x) > 0 \Rightarrow F$ κυρτή.

$$\text{☒ } x < 2x < 3x$$

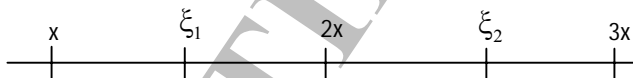
Από Θ. Μ. Τ. έχουμε F συνεχή στα $[x, 2x]$ και $[2x, 3x]$

F παραγωγίσιμη στα $(x, 2x)$ και $(2x, 3x)$

☒ Θ.Μ.Τ.

$$\xi_1 \in (x, 2x) \quad F'(\xi_1) = \frac{F(2x) - F(x)}{x}$$

$$\xi_2 \in (2x, 3x) \quad F'(\xi_2) = \frac{F(3x) - F(2x)}{x}$$



$$\xi_1 < \xi_2 \stackrel{F'}{\Rightarrow} F'(\xi_1) < F'(\xi_2) \Rightarrow \frac{F(2x) - F(x)}{x} < \frac{F(3x) - F(2x)}{x}$$

$$\text{☒ } x > 0$$

$$F(2x) - F(x) < F(3x) - F(2x) \Rightarrow F(x) + F(3x) > 2F(2x)$$

Δ4.

☒ $\xi \in (\beta, 2\beta)$

$$F(\beta) + F(3\beta) = 2F(\xi)$$

☒ $h(x) = F(\beta) + F(3\beta) - 2F(x)$ με $F'(x) = f(x) < 0$, οπότε η F είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

☒ $h(\beta) = F(\beta) + F(3\beta) - 2F(\beta) = F(3\beta) - F(\beta) < 0$

$$h(2\beta) = F(\beta) + F(3\beta) - 2F(2\beta) > 0 \text{ (λόγω του } \Delta 3)$$

☒ $h(\beta) \cdot h(2\beta) < 0$

☒ Από Θεώρημα Bolzano υπάρχει $\xi \in (\beta, 2\beta)$ ώστε :

$$h(\xi) = F(\beta) + F(3\beta) - 2F(\xi) = 0 \Rightarrow 2F(\xi) = F(\beta) + F(3\beta)$$

$h'(x) = -2F'(x) = -2f(x) > 0$, άρα η h είναι γνησίως αύξουσα, οπότε το ξ είναι μοναδικό.

**Επιμέλεια: Κανακάκης Γεώργιος
Μακρίδης Ηλίας
Μπαμπέ Αφροδίτη
Οικονομόπουλος Αναστάσιος
Πεφάνης Κωνσταντίνος
Ρούτης Κωνσταντίνος**