ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ φροντιστήριο
Α. Οικονομόπουλος – Κ. Ρούτης
Κάνιγγος 12, Πλ.Κάνιγγος
τηλ. 210 3824659, 210 3830085
Internet: www.theorhtiko.gr

27-5-13

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ
Θεωρητική Κατεύθυνση

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Βλέπε σελ.334 του σχολικού βιβλίου.

Α2. Βλέπε σελ.246 του σχολικού βιβλίου.

Α3. Βλέπε σελ.222 του σχολικού βιβλίου.

Α4.

α) → Λάθος
β) → Σωστό
γ) → Σωστό
δ) → Λάθος
ε) → Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$(z-2)(\bar{z}-2)+|z-2|=2 \Leftrightarrow |z-2|^2+|z-2|-2=0$$

Θέτω $|z-2|=\kappa$, $\kappa^2+\kappa-2=0$

$\Delta=9$

$\kappa_1=-2 \rightarrow$ απορρίπτεται $\qquad \kappa_2=+1 \rightarrow$ δεκτή

Άρα $|z-2|=1$

Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι κύκλος με κέντρο $K(2,0)$ κα ακτίνα $\rho=1$.

Από την τριγωνική ανίσωση έχουμς $|z| = |z-2+2| \le |z-2| + 2 = 1+2 = 3$

$|z| \le 3$

B2.

Από τους τύπους του Vieta έχουμε :

$z_1 + z_2 = -\beta$

$z_1 \cdot z_2 = \gamma$

και $|z_1 - 2| = 1$ και $|z_2 - 2| = 1$.

- Έστω $z_1 = x_1 + y_1 i$ και $z_2 = x_2 + y_2 i$

  $|\operatorname{Im} z_1 - \operatorname{Im} z_2| = 2 \Leftrightarrow |y_1 - y_2| = 2 \quad (1)$

- $z_1 + z_2 = -\beta \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\beta \\ y_1 + y_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\beta \\ y_1 = -y_2 \end{cases} \quad (2)$

- Επειδή οι z_1, z_2 είναι ρίζες της $w^2 + \beta w + \gamma = 0$ είναι συζυγείς:

  $$z_2 = \overline{z_1} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} z_1 + \overline{z_1} &= 2x_1 \\ z_1 + z_2 &= -\beta \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow 2x_1 = -\beta \Leftrightarrow x_1 = -\frac{\beta}{2}$$

- C: $(x_1 - 2)^2 + y_1^2 = 1 \Leftrightarrow \left(-\frac{\beta}{2} - 2\right)^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow -\frac{\beta}{2} - 2 = 0 \Leftrightarrow \beta = -4$

- $z_1 \cdot z_2 = \gamma \quad \left(z_1 = \overline{z_2}\right)$

- $z_1 \cdot \overline{z_1} = \gamma \Leftrightarrow |z_1|^2 = \gamma$

- $|z_1 - 2| = 1 \Leftrightarrow |z_1 - 2|^2 = 1 \Leftrightarrow (z_1 - 2) \cdot \left(\overline{z_1} - 2\right) = 1 \Leftrightarrow$

  $z_1 \cdot \overline{z_1} - 2\left(z_1 + \overline{z_1}\right) + 4 = 1 \Leftrightarrow \gamma + 2\beta = -3 \Leftrightarrow \gamma - 8 = -3 \Leftrightarrow \gamma = 5$

Β3.

- Έστω $|\nu| \geq 4$
- Ισχύει: $\nu^3 + \alpha_2\nu^2 + \alpha_1\nu + \alpha_0 = 0 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \nu^3 = -\alpha_2\nu^2 - \alpha_1\nu - \alpha_0 = -\left(\alpha_2\nu^2 + \alpha_1\nu + \alpha_0\right)$
- Τότε: $\left|\nu^3\right| = \left|-\left(\alpha_2\nu^2 + \alpha_1\nu + \alpha_0\right)\right| \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \left|\nu^3\right| = \left|\alpha_2\nu^2 + \alpha_1\nu + \alpha_0\right| \leq \left|\alpha_2\nu^2\right| + \left|\alpha_1\nu\right| + \left|\alpha_0\right| \Leftrightarrow$

  $$\left.\begin{array}{l} \left|\nu^3\right| \leq \left|\alpha_2\right|\left|\nu^2\right| + \left|\alpha_1\right|\left|\nu\right| + \left|\alpha_0\right| \\ \text{Αλλά} \\ \Leftrightarrow \left|\alpha_2\right| \leq 3 \\ \left|\alpha_1\right| \leq 3 \\ \left|\alpha_0\right| \leq 3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left|\nu^3\right| \leq 3\left(|\nu|^2 + |\nu| + 1\right) \Leftrightarrow \left|\nu^3\right| \leq 3\frac{|\nu|^3 - 1}{\underset{(+)}{\left(|\nu| - 1\right)}}$$
- Επειδή υποθέσαμε ότι $|\nu| \geq 4 \Rightarrow |\nu| > 1$
- Τότε $\left|\nu^3\right|\left(|\nu| - 1\right) \leq 3|\nu|^3 - 3$

  $|\nu|^4 \leq 4|\nu|^3 - 3 < 4|\nu|^3$

  $|\nu|^4 < 4|\nu|^3 \Leftrightarrow |\nu| < 4 \rightarrow$ άτοπο γιατί $|\nu| \geq 4$

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1.

$\left(f(x) + x\right) \cdot \left(f'(x) + 1\right) = x \Leftrightarrow 2\left(f(x) + x\right) \cdot \left(f(x) + x\right)' = 2x \Leftrightarrow \left(\left(f(x) + x\right)^2\right)' = \left(x^2\right)'$

οπότε: $\left(f(x) + x\right)^2 = x^2 + c,\ c \in \mathbb{R}$.

- Για $x = 0$: $\left(f(0)\right)^2 = c \Leftrightarrow c = 1$
- Άρα $\left(f(x) + x\right)^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow \left|f(x) + x\right| = \sqrt{x^2 + 1}$ (1)
- $f(x) + x \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ διότι αν $f(x) + x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = 0 \rightarrow$ άτοπο
- και $f(x) + x$ συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο και αφού $f(0) + 0 = 1 > 0$, έπεται $f(x) + x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε από (1) έπεται

  $f(x) + x = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

Γ2.

- Για την $p(x)=f(x)-1$
- Προφανής ρίζα η $x=0$ που είναι μοναδική επειδή

  $$p'(x)=f'(x)=\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}<0 \text{ στο } \mathbb{R}, \text{ διότι:}$$

- $x-\sqrt{x^2+1}<0 \Leftrightarrow x<\sqrt{x^2+1}$ που ισχύει για $x<0$ κατά προφανή τρόπο και
- για $x\geq 0$: $x\leq\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow x^2\leq x^2+1$ που ισχύει.
- Έτσι η p είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
- $\left(f\left(g(x)\right)\right)=1 \Leftrightarrow f\left(g(x)\right)=f(0) \overset{f:\ "1-1"}{\Leftrightarrow}$

  $$\Leftrightarrow g(x)=0 \Leftrightarrow x^3+\frac{3x^2}{2}-1=0$$

- $g'(x)=3x^2+3x=3x(x+1)$
- $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \qquad x=-1$

x	0		−1		0		+∞
$g'(x)$		+	0	−	0	+	
$g(x)$		↗	τ.μ.	↘	τ.ε.	↗	

- Στο $A_1=(-\infty,-1]$ η g είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής

  $$g(A_1)=(-\infty,g(-1)]=\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right],\ 0\notin g(A_1)$$

- Στο $A_2=[-1,0]$ η g είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής

  $$g(A_2)=\left[-1,-\frac{1}{2}\right],\ 0\notin g(A_2)$$

- Στο $A_3=[0,+\infty)$ η g είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής

  $$g(A_3)=[-1,+\infty),\ 0\in g(A_3)$$

- Οπότε υπάρχει μία ρίζα στο $[0,+\infty)$ που είναι μοναδική αφού η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Γ3.

- Αρκεί η $z(x)=\int_{x-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt-f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\text{εφ}x$ να έχει μία τουλάχιστον ρίζα

  $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$

- Είναι: z συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

- $z(0)\cdot z\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt\right)\left(-f(0)\cdot \text{εφ}\frac{\pi}{4}\right)=-\left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt\right)\frac{\sqrt{2}}{2}<0$, διότι από το

  Γ2 : $f(t)>0$ στο $\left[-\frac{\pi}{4},0\right]$ οπότε $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt>0$

- Άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$, ώστε

  $z(x_0)=0$.

<u>**ΘΕΜΑ Δ**</u>

Δ1.

$$0=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-f(1)}{5h}5+\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}=$$

$=5\cdot f'(1)+f(1)=6f'(1)$, άρα $f'(1)=0$

Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα, έπεται:

- Για $x<1 \Rightarrow f'(x)<f'(1)=0$.
- Για $x>1 \Rightarrow f'(x)>f'(1)=0$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	ε. ολ.	$\nearrow$	

Από τον πίνακα προκύπτει ότι η f έχει ελάχιστο στο $x_0=1$.

Δ2.

- Για κάθε $x\in(1,+\infty)$: $g'(x)=\frac{f(x)-1}{x-1}$
- $f'(x)>0$ στο $(1,+\infty)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, οπότε:
- Για $x>1$ έπεται $f(x)>f(1)\Rightarrow f(x)>1\Rightarrow f(x)-1>0$, άρα για $x>1$:

  $g'(x)>0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$.
- Παρατηρούμε ότι δεν ισχύει η ανισότητα για:

  $8x^2=2x^4 \Leftrightarrow 4x^2-x^4=0 \Leftrightarrow x^2\left(4-x^2\right)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=2$ ή $x=-2$

- Θεωρώ την $t(x)=\int_{x}^{x+1} g(u)du$
- Η g είναι συνεχής, άρα η t παραγωγίσιμη συνάρτηση με

$$t^{/}(x)=\left(\int_{x}^{\alpha} g(u)du+\int_{\alpha}^{x+1} g(u)du\right)^{/}=-g(x)+g(x+1)>0$$, επειδή

$$x<x+1 \overset{\text{η g είναι γνησίως αύξουσα}}{\Rightarrow} g(x)<g(x+1)$$

- Οπότε αρκεί να λύσουμε την

$$t\left(8x^2+5\right)>t\left(2x^4+5\right) \underset{x\neq 0}{\overset{\text{η t είναι γνησίως αύξουσα}}{\Leftrightarrow}}$$

$$\Leftrightarrow 8x^2+5>2x^4+5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8x^2>2x^4 \Leftrightarrow 4>x^2 \Leftrightarrow \ x\in(-2,0)\cup(0,2)$$

Δ3.

- Για κάθε $x>1$ είναι: $g^{/}(x)=\dfrac{f(x)-1}{x-1}$
- Η g είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.
- $g^{//}(x)=\dfrac{(f(x)-1)^{/}(x-1)-(f(x)-1)(x-1)^{/}}{(x-1)^2}=\dfrac{f^{/}(x)(x-1)-(f(x)-1)}{(x-1)^2}$,

  $(x-1)^2>0$ για κάθε $x>1$
- Οπότε αρκεί να δείξω ότι:

$$f^{/}(x)(x-1)-(f(x)-1)>0 \Leftrightarrow f^{/}(x)-\frac{f(x)-1}{x-1}>0 \ (1)$$

- Η f συνεχής στο $[1,x]$
- Η f παραγωγίσιμη στο $(1,x)$
- Οπότε από Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,x)$ ώστε

$$f^{/}(\xi)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

- $\xi<x$ και αφού η $f^{/}$ είναι γνησίως αύξουσα έπεται ότι:

$$f^{/}(\xi)<f^{/}(x)\Leftrightarrow f^{/}(x)-f^{/}(\xi)>0\Leftrightarrow f^{/}(x)-\frac{f(x)-1}{x-1}>0$$, δηλαδή η(1)

- Αν $p(x)=(\alpha-1)\int_{\alpha}^{x}\frac{f(t)-1}{t-1}dt-(f(\alpha)-1)(x-\alpha)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow p(x)=(\alpha-1)g(x)-(f(\alpha)-1)(x-\alpha)$$

- Προφανής ρίζα η $\boxed{x=\alpha}$ που είναι μοναδική διότι:

$$p'(x)=(\alpha-1)g'(x)-\left(f(\alpha)-1\right)=$$

$$=(\alpha-1)\left(g'(x)-\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}\right)=$$

$$=(\alpha-1)\left(g'(x)-g'(\alpha)\right)$$ και g' γνησίως αύξουσα οπότε:

- Για $x<\alpha \Leftrightarrow g'(x)<g'(\alpha)$
- Για $x>\alpha \Leftrightarrow g'(x)>g'(\alpha)$
- Η p είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,\alpha]$, άρα η $x=\alpha$ είναι μοναδική ρίζα.
- Η p είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,+\infty)$, άρα η $x=\alpha$ είναι μοναδική ρίζα.

x	1		α		$+\infty$
$p'(x)$		$-$	0	$+$	
$p(x)$		↘	ε ολ.	↗	

Επιμέλεια: Μακρίδης Ηλίας
Οικονομόπουλος Αναστάσιος
Πεφάνης Κωνσταντίνος
Ρούτης Κωνσταντίνος