

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ
ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')**

- ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014 -

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΘΕΜΑ Α

A1. Βλέπε θεωρία

A2. Βλέπε ορισμό.

A3. Βλέπε ορισμό.

A4. α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1.

$$z = x + yi$$

$$2(x^2 + y^2) + 2xi - 4 - 2i = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2x^2 + 2y^2 - 4) + (2x - 2)i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x^2 + 2y^2 - 4 = 0 \\ x = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow 2y^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{array}{l} y = \pm 1 \\ x = 1 \end{array}$$

$$z_1 = 1 + i \quad z_2 = 1 - i$$

$$B2. w = 3 \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{39} = 3 \left(\frac{i(1-i)}{1-i} \right)^{39} = 3 \cdot i^{39} = 3 \cdot i^3 = -3i$$

B3.

$$|u - 3i| = |4(1+i) - 1 + \lambda - \lambda| \Leftrightarrow$$

$$|u - 3i| = |3 + 4i| \Leftrightarrow$$

$$|u - 3i|^2 = |3 + 4i|^2 \Leftrightarrow$$

$$(u - 3i)(\bar{u} + 3i) = 25 \Leftrightarrow$$

$$u\bar{u} + 3iu - 3i\bar{u} + 9 = 25 \Leftrightarrow$$

$$u\bar{u} + 3i(u - \bar{u}) = 16 \Leftrightarrow$$

Παίρνω :

$$u = x + yi \quad \mu\epsilon \quad x, y \in \mathbb{R} \quad x^2 + y^2 + 3i - 2yi = 16 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 - 6y - 16 = 0$$

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = 36 + 64 = 100 > 0 : \text{που είναι}$$

κύκλος με κέντρο $K(0,3)$ και ακτίνα $\rho = 5$.

ΘΕΜΑ Γ

$$Γ1. h(x) = x - \ln(e^x + 1)$$

- Η h είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών και παραγωγίσιμων.

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{e^x + 1} e^x = \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x + 1} > 0$$

$$h''(x) = \left(\frac{1}{e^x + 1} \right)' = -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2} < 0$$

Άρα η h είναι κοίλη στο \mathbb{R}

Γ2.

$$e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1} \Leftrightarrow \ln e^{h(2h'(x))} < \ln \frac{e}{e+1} \Leftrightarrow$$

$$h(2h'(x)) < \ln e - \ln(e+1) \Leftrightarrow$$

$$h(2h'(x)) < 1 - \ln(e+1)$$

Επειδή $h'(x) > 0 \Rightarrow h$ γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

$$h(2h'(x)) < h(1) \Leftrightarrow 2h'(x) < 1 \Leftrightarrow$$

$$2 \frac{1}{e^x + 1} < 1 \Leftrightarrow 2 < e^x + 1 \Leftrightarrow 1 < e^x \Leftrightarrow \boxed{x > 0}$$

Γ3.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(e^x + 1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln e^x - \ln(e^x + 1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{e^x}{e^x + 1} \right)$$

$$\text{Θέτω } \left. \begin{array}{l} u = \frac{e^x}{e^x + 1} \\ x \rightarrow +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{e^x}{e^x + 1} \right) = \lim_{u \rightarrow 1} (\ln u) = \ln 1 = 0.$$

Η $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Πλάγια ασύμπτωτη $y = \lambda x + \beta$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x - \ln(e^x + 1)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{\ln(e^x + 1)}{x} \right)$$

Έχουμε $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x + 1) = \ln 1 = 0$.

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x} \ln(e^x + 1) \right) = 1 \quad \boxed{\lambda = 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [h(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\ln(e^x + 1)] = \ln 1 = 0 \quad \boxed{\beta = 0}$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x) = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 1) = 1 \right)$$

Η είναι $y = x$ πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Γ4. $\varphi(x) = e^x (h(x) + \ln 2)$

$$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) + \ln 2 = 0 \Leftrightarrow x - \ln(e^x + 1) = -\ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\ln \frac{e^x}{e^x + 1} = \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2e^x = e^x + 1 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow \boxed{x = 0}$$

Είναι $\varphi(x) \geq 0$: για $x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} h(x) + \ln 2 &= x - \ln(e^x + 1) + \ln 2 = \ln e^x - \ln(e^x + 1) + \ln 2 = \\ &= \ln \frac{2e^x}{e^x + 1} \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } \frac{2e^x}{e^x + 1} \geq 1 \Leftrightarrow 2e^x \geq e^x + 1 \Leftrightarrow e^x \geq e^0 \Leftrightarrow x \geq 0.$$

$$\text{Άρα } \ln \frac{2e^x}{e^x + 1} \geq \ln 1 \Rightarrow \ln \frac{2e^x}{e^x + 1} \geq 0$$

$$\begin{aligned}
 E &= \int_0^1 \varphi(x) dx = \int_0^1 e^x (h(x) + \ln 2) dx = \\
 &= \int_0^1 e^x h(x) dx + \int_0^1 e^x \ln 2 dx = \\
 &= [e^x h(x)]_0^1 - \int_0^1 e^x h'(x) dx + [e^x]_0^1 \ln 2 = \\
 &= eh(1) - h(0) - \int_0^1 e^x \frac{1}{e^x + 1} dx + e \ln 2 - \ln 2 = \\
 &= e(1 - \ln(e+1)) + \ln 2 - [\ln(e^x + 1)]_0^1 + e \ln 2 - \ln 2 = \\
 &= e - e \ln(e+1) + \ln 2 - \ln(e+1) + e \ln 2 = \\
 &= e + (1+e) \ln 2 - (1+e) \ln(e+1) = \\
 &= e + (1+e) \ln \frac{2}{e+1} \text{ τ.μ.}
 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1. \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{x'} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x = e^0 = 1 = f(0)$$

Οπότε f συνεχής στο $x_0 = 0$.

➤ Για $x \neq 0$

$$\bullet f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x} \right)' = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$$

$$\text{Θέτω: } g(x) = xe^x - e^x + 1$$

$$\text{Αν: } g'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

- Για $x < 0 \Rightarrow g(x) > g(0) \Rightarrow g(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ άρα f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$
- Για $x > 0 \Rightarrow g(x) > g(0) \Rightarrow g(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ άρα f γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$
- f συνεχής στο 0 . Τελικά γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Δ2. Είναι f' γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} και $f''(x) > 0$ στο \mathbb{R} .

$$\begin{aligned}
 \alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x \cdot \left(\frac{0}{0}\right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1 - x)'}{(x^2)'} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{0}{=} \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Άρα $f'(0) = \frac{1}{2}$.

Η $x = 0$ είναι ρίζα αφού $\int_1^{2f'(0)} f(u) du = \int_1^{2 \cdot \frac{1}{2}} f(u) du = \int_1^1 f(u) du = 0$

Επίσης είναι: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} (e^x - 1) \right) = 0 \cdot (-1) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1 \left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x - 1)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

και αφού f γνησίως αύξουσα και συνεχής έπεται ότι: $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$ ή ίση με μηδέν σε μεμονωμένο σημείο (αφού $f''(x) > 0$ ή ίση με μηδέν σε μεμονωμένα σημεία και $f(2f'(x)) \in (0, +\infty)$) άρα $\int_1^{2f'(x)} f(u) du$ γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} οπότε η ρίζα $x = 0$ είναι μοναδική.

β) Είναι $y(t) = f(x(t))$ και $x'(t) = 2y'(t)$

$$y'(t) = f(x(t))' \Leftrightarrow y'(t) = f'(x(t)) \cdot x'(t) \Leftrightarrow$$

$$\frac{x'(t)}{2} = f'(x(t))x'(t) \Leftrightarrow f'(x(t)) = \frac{1}{2} \quad (1)$$

Έχουμε πιο πάνω βρει: $f'(0) = \frac{1}{2}$ και αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα έπεται η τιμή $x(t) = 0$ είναι η μοναδική που επαληθεύει την (1).

Οπότε το ζητούμενο σημείο είναι το $M(0, f(0)) = (0, 1)$

Δ3.

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x} \Leftrightarrow xf(x) = e^x - 1 \text{ για } x \neq 0, \text{ οπότε}$$

$$g(x) = (e^x - 1 + 1 - e)^2 (x - 2)^2 = (e^x - e)^2 (x - 2)^2$$

$$\begin{aligned} x > 0: \quad g'(x) &= 2(e^x - e)(e^x - e)'(x - 2)^2 + (e^x - e)^2 \cdot 2(x - 2) = \\ &= 2(e^x - e)(x - 2)[e^x(x - 2) + (e^x - e)] \\ &= 2(e^x - e)(x - 2)[xe^x - 2e^x + e^x - e] \\ &= 2(e^x - e)(x - 2)(xe^x - e^x - e) \end{aligned}$$

$e^x - e = 0 \Leftrightarrow x = 1$ μοναδική ρίζα $(e^x - e)' = e^x > 0, 1$, άρα $e^x - e$ είναι γνησίως αύξουσα

$$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Για την $t(x) = xe^x - e^x - e$ παρατηρούμε ότι:

t: συνεχής στο $[1, 2]$

$$t(1)t(2) = -e(e^2 - e) < 0$$

Οπότε από Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (1,2)$ ώστε $t(x_0)=0$. Το x_0 είναι μοναδική ρίζα στο $(0,+\infty)$ αφού $t'(x)=(xe^x)'-(e^x)'=e^x+xe^x-e^x=xe^x > 0$ άρα η t είναι γνησίως αύξουσα.

Επίσης:

για $x < x_0$ $\stackrel{t: \text{ γνησίως αύξουσα}}{\Rightarrow} t(x) < t(x_0) \Rightarrow t(x) < 0$

για $x > x_0$ $\stackrel{t: \text{ γνησίως αύξουσα}}{\Rightarrow} t(x) > t(x_0) \Rightarrow t(x) > 0$

x		0	1	x_0	2	$+\infty$
$g'(x)$		-	+	-	+	+
$g(x)$		↘	↗	↘	↗	↗
			τ.ε.	τ.μ.	τ.ε.	

Επιμέλεια: Κανακάκης Γιώργος

Μακρίδης Ηλίας

Οικονομόπουλος Αναστάσιος

Πεφάνης Κωνσταντίνος

Ρούτης Κωνσταντίνος