ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. → Θεωρία, Σχολικό βιβλίο σελ.152

Α2. → Θεωρία, Σχολικό βιβλίο σελ.142

Α3. → Εκφράζει το ποσοστό της παρατήρησης x_i στο μέγεθος του δείγματος.

Α4.

- **α)** → Λάθος
- **β)** → Λάθος
- **γ)** → Σωστό
- **δ)** → Λάθος
- **ε)** → Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Ισχύει $P(M)=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{N(M)}{N(\Omega)}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{N(\Omega)}{4}=N(M)\in\mathbb{N}^*$ (1)

Ισχύει $64<N(\Omega)<72\Leftrightarrow\frac{64}{4}<\frac{N(\Omega)}{4}<\frac{72}{4}$

$16<N(M)<18\overset{N(M)\in\mathbb{N}^*}{\Rightarrow}N(M)=17$

Για $N(M)=17\overset{(1)}{\Rightarrow}N(\Omega)=4\cdot17=68$

Β2. Ισχύει

$$P(A)+P(M)+P(K)=P(\Omega)\Rightarrow 4\lambda^2+\frac{1}{4}+\left(-5\lambda+\frac{7}{4}\right)=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\lambda^2-5\lambda+1=0\Rightarrow \left\langle \begin{array}{l}\lambda=1\\ \lambda=\dfrac{1}{4}\end{array}\right.$$

Η τιμή $\lambda=1$ απορρίπτεται διότι δίνει $P(K)=-\frac{13}{4}<0$

Άρα $\lambda=\frac{1}{4}$

Β3. Για $\lambda=\frac{1}{4}$ και $N(\Omega)=68$, έχουμε:

- $P(A)=4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{N(A)}{68}=\frac{1}{4}\Rightarrow N(A)=17$
- $P(M)=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{N(M)}{N(\Omega)}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{N(M)}{68}=\frac{1}{4}\Rightarrow N(M)=17$
- $P(K)=-5\cdot\frac{1}{4}+\frac{7}{4}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{N(K)}{N(\Omega)}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{N(K)}{68}=\frac{1}{2}\Rightarrow N(K)=34$

Άρα έχουμε 17 άσπρες, 17 μαύρες και 34 κόκκινες σφαίρες.

Β4. Είναι Α: «Η σφαίρα είναι άσπρη», Μ: «Η σφαίρα είναι μαύρη».

Ζητάμε $P(A\cup M)=P(A)+P(M)$ διότι τα ενδεχόμενα Α και Μ είναι ασυμβίβαστα.

Άρα $P(A\cup B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

ΘΕΜΑ Γ

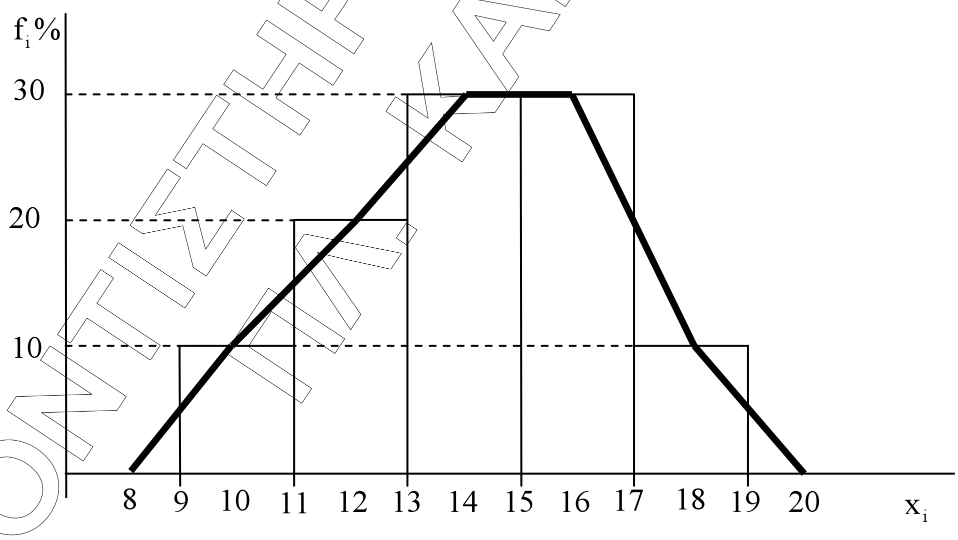
Γ1. Επειδή το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ είναι παράλληλο προς τον οριζόντιο άξονα έχουμε $y_\Delta = y_E$

Έχουμε

$$(f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5)\% = 100 \Rightarrow 10 + 20 + y_\Delta + y_E + 10 = 100 \Rightarrow$$
$$40 + 2y_\Delta = 100 \Rightarrow y_\Delta = 30$$

$$y_\Delta = y_E = 30$$

Γ2.



Γ3.

$[-)$	x_i	$f_i\%$
9 – 11	**10**	**10**
11 – 13	**12**	**20**
13 – 15	**14**	**30**
15 – 17	**16**	**30**
17 – 19	**18**	**10**
Σύνολο		**100**

Γ4.

Το ποσοστό των πωλητών με πωλήσεις τουλάχιστον 15.000€ βρίσκονται στις δύο τελευταίες κλάσεις. Άρα έχουμε $(f_4+f_5)\%=(30+10)=40$.

Άρα το ποσοστό των πωλητών είναι 40%

Γ5.

$E=80$ οπότε $\nu=80$.

Έχουμε $\frac{\nu_4+\nu_5}{\nu}=0,40\Leftrightarrow\frac{\nu_4+\nu_5}{80}=0,4\Leftrightarrow\nu_4+\nu_5=32$

Άρα 32 πωλητές έλαβαν το εφάπαξ ποσόν.

<u>Παρατήρηση</u>

Η μέση τιμή $\overline{x}=14200$ που δίνεται στο ερώτημα Γ1 είναι περιττή.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

- Η f είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=\left(e^{\frac{1}{3}x\cdot\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}\right)'=e^{\frac{1}{3}x\cdot\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}\cdot\frac{1}{3}\left(x^3-\frac{11}{10}x^2+\frac{2}{5}x\right)'=$$

$$=e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}\cdot\frac{1}{3}\left(3x^2-\frac{11}{10}2x+\frac{2}{5}\right)=e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}\cdot\frac{1}{15}\left(15x^2-11x+2\right)$$

- Για το τριώνυμο $15x^2-11x+2$ είναι $\Delta=1>0$, $x_{1,2}=\dfrac{11\pm1}{30}=\left\langle\begin{matrix}\frac{2}{5}\\ \frac{1}{3}\end{matrix}\right.$

  και επειδή $e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνεται στον πίνακα:

x	$-\infty$		$1/3$		$2/5$		$+\infty$
f'		+		−		+	
f		$\nearrow$	τ.μ.	$\searrow$	τ.ε.	$\nearrow$	

Δ2.

- $A\subseteq B$ άρα $P(A)\le P(B)$ και επειδή $\frac{1}{3}<\frac{2}{5}$ έπεται $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{2}{5}$

- $A\subseteq B$ άρα:

i. $A\cap B=A$ $\qquad$ $P(A\cap B)=P(A)=\frac{1}{3}$

ii. $A-B=\varnothing$ $\qquad$ $P(A-B)=0$

iii. $A \cup B = B$ $\quad\quad P(A \cup B) = P(B) = \frac{2}{5}$

iv. $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) = \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$

Δ3.

- **α)** $f(x) = h(x) \Leftrightarrow e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)} = e^{\frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right)}$

  και επειδή η συνάρτηση e^x είναι "1 – 1" έπεται:

  ☞ $\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow 5x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right) = 3x\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \boxed{x = 0}$ ή

  ☞ $5\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right) = 3\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow 5x^2 - \frac{11}{2}x + 2 - \frac{9x^2}{2} + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{5}{2}x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

  $\Delta = 25 - 24 = 1, \quad x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \left\langle \begin{array}{l} x = 3 \\ x = 2 \end{array} \right.$

- **β)** $x_1 < x_2 < x_3$

  άρα $x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$

  και $\nu_1 = 1,\ \nu_2 = 5,\ \nu_3 = 7$

  $\bar{x} = \frac{1 \cdot 0 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot 3}{1 + 5 + 7} = \frac{31}{13}$

Επιμέλεια: *Μακρίδης Ηλίας*
Μπαμπέ Αφροδίτη
Οικονομόπουλος Αναστάσιος
Πεφάνης Κώστας