

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β'

16 ΜΑΪΟΥ 2011

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία (θεώρ. Fermat) σχολικό βιβλίο, σελ. 260-261.

A2. Θεωρία (ορισμός) σχολικό βιβλίο, σελ. 280.

A3.

α	β	γ	δ	ε
Σ	Σ	Λ	Λ	Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Έχουμε από υπόθεση ότι:

$$|z-3i|+|\bar{z}+3i|=2 \quad (1)$$

$$\text{Όμως } |\bar{z}+3i| = |\overline{z+3i}| = |z-3i| \quad (2)$$

Οπότε από τις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$|z-3i|+|z-3i|=2 \Leftrightarrow 2|z-3i|=2 \Leftrightarrow |z-3i|=1 \quad (3).$$

$$\text{Αν } z = x + yi \text{ η (3) γράφεται: } |x+(y-3)i|=1 \Leftrightarrow x^2+(y-3)^2=1$$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z είναι κύκλος με κέντρο το σημείο $K(0,3)$ και ακτίνα $\rho=1$.

B2. Από το ερώτημα Β1 έχουμε: $|z-3i|=1$

$$\text{Οπότε } |z-3i|^2=1 \Leftrightarrow (z-3i) \cdot \overline{(z-3i)}=1 \Leftrightarrow (z-3i) \cdot (\bar{z}+3i)=1 \Leftrightarrow \bar{z}+3i=\frac{1}{z-3i}.$$

B3. Σύμφωνα με την προηγούμενη ισότητα ο w γράφεται

$$w = z - 3i + \frac{1}{z-3i} = z - 3i + \bar{z} + 3i = z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}.$$

Όμως από τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z έχουμε ότι: $x^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.

Και επειδή $x = \operatorname{Re}(z)$ προκύπτει ότι: $-1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1$.

Οπότε: $-2 \leq 2\operatorname{Re}(z) \leq 2$. Άρα $-2 \leq w \leq 2$.

B4. Είναι: $|z-w| = \left| z - z + 3i - \frac{1}{z-3i} \right| = \left| 3i - \frac{1}{z-3i} \right| = |3i - \bar{z} - 3i| = |-\bar{z}| = |z|.$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η δοσμένη σχέση γράφεται:

$$(e^x)' \cdot f'(x) + e^x \cdot f''(x) - (e^x)' = (x \cdot f'(x))' \Leftrightarrow$$

$$(e^x \cdot f'(x) - e^x)' = (x \cdot f'(x))' \Leftrightarrow e^x \cdot f'(x) - e^x = x \cdot f'(x) + c_1, c_1 \in \mathbb{R}$$

Για $x = 0$ προκύπτει:

$$e^0 \cdot f'(0) - e^0 = 0 \cdot f'(0) + c_1 \text{ και λόγω των δεδομένων αρχικών συνθηκών είναι}$$

$$c_1 = -1.$$

Η τελευταία σχέση έτσι γράφεται:

$$e^x \cdot f'(x) - e^x = x \cdot f'(x) - 1 \Leftrightarrow f'(x)(e^x - x) = e^x - 1 \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = [\ln(e^x - x)]' \Leftrightarrow f(x) = \ln(e^x - x) + c_2.$$

Για $x = 0$ προκύπτει $c_2 = 0$.

Έτσι $f(x) = \ln(e^x - x)$.

(*) Αν θέσουμε $h(x) = e^x - x$, $x \in \mathbb{R}$, είναι:

$$h'(x) = e^x - 1, x \in \mathbb{R}.$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0.$$

$$h'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow x < 0.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
h'	-	0	+
h	↘ 1 ↗		

Έτσι η h έχει ολικό ελάχιστο στη θέση $x=0$ την τιμή $h(0) = e^0 - 0 = 1$.

Δηλαδή $h(x) \geq 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ2. Είναι $f'(x) = [\ln(e^x - x)]' = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$.

Λόγω της παρατήρησης (*) του ερωτήματος Γ1 οι ρίζες και το πρόσημο, συνεπώς ο πίνακας μεταβολών της f εξαρτάται μόνον από τις ρίζες και το πρόσημο του αριθμητού. $h'(x) = e^x - 1$.

Συνεπώς $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0.$$

Άρα η f είναι: γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x = 0$ την τιμή $f(0) = \ln(e^0 - 0) = \ln 1 = 0$.

Γ3. Είναι: $f''(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x - x} \right)' = \frac{(e^x - 1)'(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x - x)'}{(e^x - x)^2} =$

$$= \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)^2}{(e^x - x)^2}$$

$$= \frac{e^{2x} - xe^x - (e^{2x} - 2e^x + 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{(2-x)e^x - 1}{(e^x - x)^2}$$

Θέτουμε $\varphi(x) = (2-x)e^x - 1, x \in \mathbb{R}$.

Είναι:

$$\varphi'(x) = -e^x + (2-x) \cdot e^x = e^x(1-x)$$

$$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

$$\varphi'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
φ	$+$	\emptyset	$-$
φ			

Προκύπτει ότι η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ και έχει ολικό μέγιστο $\varphi(1) = e - 1 > 0$.

Βρίσκουμε τώρα τα όρια της φ στα $-\infty, +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(2-x) \cdot e^x - 1] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2-x) \cdot e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-x}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2-x)'}{(e^{-x})'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{e^{-x}} = 0$$

$$\text{Έτσι } \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = -1.$$

Λόγω της συνέχειας και της μονοτονίας της φ είναι

$$\varphi((-\infty, 1]) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x), \varphi(1) \right] = (-1, e-1].$$

$$\varphi([1, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x), \varphi(1) \right] = (-\infty, e-1].$$

Παρατηρούμε ότι:

- $0 \in \varphi((-\infty, 1])$ άρα υπάρχει $x_1 \in (-\infty, 1]$ ώστε $\varphi(x_1) = 0$.

Εν τω μεταξύ η φ είναι γνησίως αύξουσα, άρα εκατέρωθεν του x_1 αλλάζει

πρόσημο. Διότι με $x < x_1$ είναι $\varphi(x) < \varphi(x_1) \Leftrightarrow \varphi(x) < 0$.

Ενώ με $1 > x > x_1$ είναι $\varphi(x) > \varphi(x_1) \Leftrightarrow \varphi(x) > 0$.

Έτσι ισοδύναμα (επειδή $(e^x - x)^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$) η f'' έχει μία μόνο ρίζα στο $(-\infty, 1]$, εκατέρωθεν της οποίας αλλάζει πρόσημο.

- Όμοια τώρα $0 \in \varphi([1, +\infty))$ άρα υπάρχει $x_2 \in [1, +\infty)$, ώστε $\varphi(x_2) = 0$. Εν τω

μεταξύ η φ είναι γνησίως φθίνουσα άρα εκατέρωθεν του x_2 αλλάζει πρόσημο.

Διότι με $1 < x < x_2$ είναι $\varphi(x) > \varphi(x_2) \Leftrightarrow \varphi(x) > 0$

Ενώ με $x > x_2$ είναι $\varphi(x) < \varphi(x_2) \Leftrightarrow \varphi(x) < 0$.

Έτσι η f'' έχει επίσης μία μόνο ρίζα x_2 στο $[1, +\infty)$, εκατέρωθεν της οποίας αλλάζει πρόσημο. Άρα τελικά, η f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής στις θέσεις x_1, x_2 .

Γ4. Θέτουμε $g(x) = \ln(e^x - x) - \sin x = f(x) - \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

- Υπαρξη: Η g είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών στο \mathbb{R} , άρα και στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Είναι $g(0) = f(0) - \sin(0) = -1 < 0$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\frac{\pi}{2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Όμως $f \uparrow$ στο $[0, +\infty)$, άρα είναι $\frac{\pi}{2} > 0 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) > f(0) \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$.

Έτσι $g(0) \cdot g\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$, οπότε λόγω του Θ. Bolzano η g έχει μία ρίζα στο

διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

- Μοναδικότητα:

Θα δείξουμε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, οπότε η ρίζα θα είναι μοναδική.

Έστω $x_1, x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ με $x_1 < x_2$ τότε

$f(x_1) < f(x_2)$ διότι $f \uparrow$ στο $[0, +\infty)$

$\sin x_1 > \sin x_2$ διότι $\sin x \downarrow$ στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Άρα $-\sin x_1 < -\sin x_2$.

Έτσι όμως $f(x_2) - \sin x_1 < f(x_2) - \sin x_2$, άρα $g(x_1) < g(x_2)$.

Άρα g γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Παρατήρηση (2^{ος} τρόπος για τη μονοτονία):

Η μονοτονία της g στο $[0, \pi/2]$ μπορεί να προκύψει και ως εξής:

$g'(x) = f'(x) + \eta\mu x$. Όμως $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ άρα και για κάθε $x \in (0, \pi/2)$, ενώ επίσης $\eta\mu x > 0$ για κάθε $x \in (0, \pi/2)$.

Άρα $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, \pi/2)$ και επομένως g γνησίως αύξουσα στο $[0, \pi/2]$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε ότι:

$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_0^x \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt$$

Θέτουμε: $x+t=u \Leftrightarrow t=u-x$. Οπότε: $dt=du$.

Ακόμη για $t=0$ έχουμε $u=x$ και για $t=x$ έχουμε $u=0$.

Επομένως:

$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_x^0 \frac{e^{2u-2x}}{g(u)} du = \int_x^0 e^{-2x} \frac{e^{2u}}{g(u)} du = e^{-2x} \int_x^0 \frac{e^{2u}}{g(u)} du \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-f(x) = -e^{2x} e^{-2x} \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du \Leftrightarrow 1-f(x) = -\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du$$

$$\text{Άρα } f(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du \quad (1)$$

Με ανάλογο τρόπο προκύπτει ότι:

$$g(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)} du \quad (2)$$

Επειδή οι συναρτήσεις $\frac{e^{2u}}{g(u)}$ και $\frac{e^{2u}}{f(u)}$ είναι συνεχείς στο $[0, x]$ με $x \in \mathbb{R}$ συμπεραίνουμε ότι οι συναρτήσεις $\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du$ και $\int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)} du$ είναι παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} , επομένως και οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} .

$$f'(x) = \frac{e^{2x}}{g(x)} \quad \text{και} \quad g'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)}$$

$$\text{οπότε } f'(x)g(x) = e^{2x} \quad \text{και} \quad g'(x)f(x) = e^{2x}$$

άρα

$$f'(x)g(x) = g'(x)f(x) \Leftrightarrow f'(x)g(x) - g'(x)f(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = 0.$$

$$\text{Από την τελευταία προκύπτει ότι: } \frac{f(x)}{g(x)} = c$$

$$\text{και επειδή } f(0) = g(0) \stackrel{(1)\&(2)}{=} 1, \text{ θα είναι } c = 1.$$

$$\text{Άρα } f(x) = g(x).$$

Δ2. Επειδή είναι:

$$f'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)} \Leftrightarrow \text{(Ερώτημα Δ1)}$$

$$f'(x)f(x) = e^{2x} \Leftrightarrow 2f'(x)f(x) = 2e^{2x} \Leftrightarrow (f^2(x))' = (e^{2x})'$$

Σύμφωνα με γνωστό θεώρημα (συνέπεια του Θ.Μ.Τ.) έχουμε:

$$f^2(x) = e^{2x} + c$$

Όμως $f(0) = 1$, οπότε $c = 0$.

$$\text{Άρα } f^2(x) = e^{2x} \Leftrightarrow [f(x)]^2 = [e^x]^2 \Leftrightarrow |f(x)| = e^x$$

Και επειδή $f(x) > 0$, προκύπτει ότι $f(x) = e^x$.

Δ3. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln e^x}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \cdot e^{-\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x} + \infty}}{\frac{1}{x}} = (De L'Hospital) (*)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{\left(-\frac{1}{x^2} \right)} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = -\infty.$$

(*): Θέτουμε $\frac{1}{x} = y$ οπότε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^{-y}}{y} = \frac{+\infty}{-\infty}$.

Δ4. Είναι $F'(x) = f(x^2) > 0$. Άρα η $F \uparrow$ στο $[0,1]$.
 Άρα για $0 \leq x \leq 1$ θα είναι $F(x) \leq F(1)$ και επειδή $F(1) = 0$, προκύπτει ότι $F(x) \leq 0$
 $\forall x \in [0,1]$.

Επομένως $\forall x \in [0,1]$, θα είναι:

$$E = - \int_0^1 F(x) dx = - \int_0^1 x' F(x) dx = - [xF(x)]_0^1 + \int_0^1 xF'(x) dx =$$

$$= -F(1) + \int_0^1 x \left(\int_1^x f(t^2) \right) dx = \int_0^1 xf(x^2) dx =$$

$$= \int_0^1 xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 2xe^{x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (e^{x^2})' dx = \frac{1}{2} [e^{x^2}]_0^1 = \frac{1}{2} (e-1) \text{ τ.μ.}$$