

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΤΕΤΑΡΤΗ 18 ΜΑΪΟΥ 2016 – ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

ΘΕΜΑ Α

A1. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 262.

A2. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 141.

A3. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 246

A4.

α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Λάθος

δ) Σωστό

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} ως ρητή.

$$\bullet \quad f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - 2x \cdot x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2} \quad (1)$$

$$\bullet \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ είναι πιθανό ακρότατο}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↙		↘

- Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$
- Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$
- Στο $x_0 = 0$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο με τιμή $f(0) = 0$

B2.

Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} .

$$\bullet \quad f''(x) = \frac{2(x^2+1)^2 - 2x \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{2(x^2+1)[(x^2+1) - 4x^2]}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{2(-3x^2+1)}{(x^2+1)^3} = 2 \frac{-3x^2+1}{(x^2+1)^3} \quad (1)$$

$$\bullet \quad f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2(-3x^2+1) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ είναι πιθανά σημεία καμψής}$$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
f''	-	0	+	-
f	↘		↗	
	σ.κ.		σ.κ.	

- Επομένως η συνάρτηση f είναι κοίλη στα $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ και $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$
& κυρτή στο $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$
- $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{4}$
- $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{4}$
- Με σημεία καμπής τα $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}\right)$ και $B\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}\right)$

B3.

i. Κατακόρυφες δεν έχει διότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

ii. Πλάγιες – οριζόντιες ασύμπτωτες

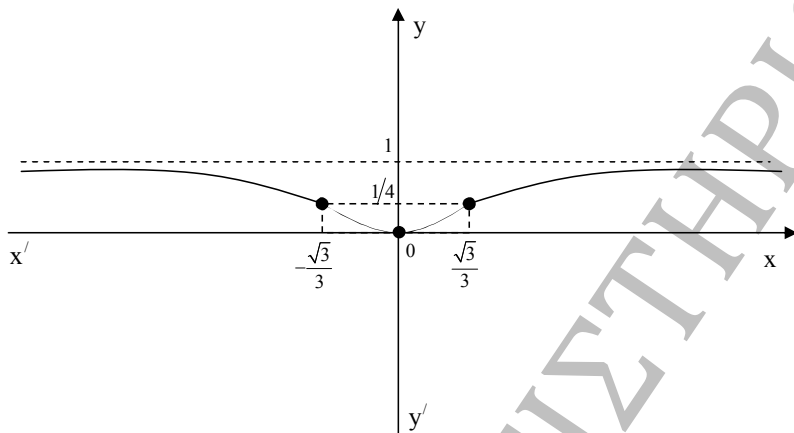
$$y = \lambda x + \beta$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^3 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, άρα $\lambda = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = 1$, άρα $\beta = 1$

Ομοίως και για το $-\infty$.

Άρα έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y = 1$ στο $+\infty$ και στο $-\infty$

B4.



ΘΕΜΑ Γ



Γ1.

Η $e^{x^2} - x^2 - 1 = 0$ έχει μοναδική λύση την $x = 0$ διότι $e^0 - 0 - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - 1 = 0$

Παίρνω:

$$g(x) = e^x - x - 1$$

$$g'(x) = e^x - 1 \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Άρα: $g(x) \geq g(0) \Rightarrow g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$x < 0 \Rightarrow$ ε: γνησίως φθίνουσα $g(x) > g(0) \Rightarrow g(x) > 0 \Rightarrow g(x) \neq 0$ στο $(-\infty, 0)$

$0 < x \stackrel{\text{εγγισίως}}{\Rightarrow} g(0) < g(x) \Rightarrow 0 < g(x) \Rightarrow g(x) \neq 0 \text{ στο } (0, +\infty)$

Άρα η $x = 0$ είναι μοναδική ρίζα.

Θέτω όπου x το x^2 οπότε έχω:

$$g(x^2) = e^{x^2} - x^2 - 1 \quad g(0) = 0$$

$$g(x^2) = g(0) \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ είναι μοναδική ρίζα}$$

Γ2.

$$|f(x)| = |e^{x^2} - x^2 - 1|$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = 0 \Leftrightarrow |e^{x^2} - x^2 - 1| = 0 \Leftrightarrow e^{x^2} - x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Η f είναι συνεχής στα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ και για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Άρα η f διατηρεί πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

Έχουμε $e^{x^2} - x^2 - 1 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ από το Γ1.

Αν $f(x) > 0$ στα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

$$f(x) = |e^{x^2} - x^2 - 1| \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$e^{x^2} - x^2 - 1 \geq 0$$

$$f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- Αν $f(x) < 0$ στα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ έχουμε $f(x) = -|e^{x^2} - x^2 - 1|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$e^{x^2} - x^2 - 1 \geq 0$$

$$f(x) = -e^{x^2} + x^2 + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- Αν $f(x) > 0$ στο $(-\infty, 0)$ και $f(x) < 0$ στο $(0, +\infty)$ έχουμε:

$$f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1 & x \leq 0 \\ -e^{x^2} + x^2 + 1 & x > 0 \end{cases}$$

- Αν $f(x) < 0$ στο $(-\infty, 0)$ και $f(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$ έχουμε:

$$f(x) = \begin{cases} -e^{x^2} + x^2 + 1 & x \leq 0 \\ e^{x^2} - x^2 - 1 & x > 0 \end{cases}$$

Γ3.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)' = e^{x^2} 2x - 2x$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^{x^2} (2x)^2 + 2e^{x^2} - 2 \\ &= 4x^2 e^{x^2} + 2e^{x^2} - 2 \end{aligned}$$

$$= 4x^2 e^{x^2} + 2(e^{x^2} - 1) > 0 \text{ για } x \neq 0 \text{ ως άθροισμα θετικών.}$$

$$(\text{Για } x \neq 0 \text{ έχουμε } x^2 > 0 \Rightarrow e^{x^2} > e^0 \Rightarrow e^{x^2} > 1 \Rightarrow e^{x^2} - 1 > 0)$$

Οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$.

Η f' είναι συνεχής στο 0 άρα f' γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} οπότε f κυρτή στο \mathbb{R} .

Γ4. Αν $g(x) = f(x+3) - f(x)$ τότε $g'(x) = f'(x+3) - f'(x) > 0$ αφού f' γνησίως αύξουσα (από Γ3) οπότε g γνησίως αύξουσα άρα $g : "1-1"$ στο $[0, +\infty)$.

$$f(|\eta\mu x| + 3) - f(|\eta\mu x|) = f(x+3) - f(x) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow g(|\eta\mu x|) = g(x) \Leftrightarrow |\eta\mu x| = x$ που ισχύει μόνο για $x = 0$ (εφαρμογή σχολικού βιβλίου σελ. 170).

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Θέτω $g(x) = \frac{f(x)}{\eta\mu x} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \cdot \eta\mu x$. Η f συνεχής στο 0 οπότε:

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (g(x) \cdot \eta\mu x) = 0$$

$$\blacksquare \int_0^\pi (f(x) + f''(x)) \eta\mu x dx = \pi \Leftrightarrow \int_0^\pi f(x) \eta\mu x dx + \int_0^\pi f''(x) \eta\mu x dx = \pi \Leftrightarrow$$

$$\int_0^\pi f(x) \eta\mu x dx + [f'(x) \eta\mu x]_0^\pi - \int_0^\pi f'(x) \sigma\upsilon\nu x dx = \pi \Leftrightarrow$$

$$\int_0^\pi f(x) \eta\mu x dx + [f'(x) \eta\mu x]_0^\pi - [f(x) \sigma\upsilon\nu x]_0^\pi - \int_0^\pi f(x) \eta\mu x dx = \pi \Leftrightarrow$$

$$0 - f(\pi) \sigma\upsilon\nu \pi + f(0) \sigma\upsilon\nu 0 = \pi \Leftrightarrow f(\pi) + 0 = \pi \Leftrightarrow f(\pi) = \pi$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(g(x) \frac{\eta\mu x}{x} \right) = 1 \cdot 1 = 1 \text{ άρα } f'(0) = 1.$$

Δ2.

α) Αν υπάρχει $\rho \in \mathbb{R}$ όπου η f παρουσιάζει ακρότατο τότε από Θεώρημα Fermat έπεται ότι $f'(\rho) = 0$.

$$\text{Για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (e^{f(x)} + x)' = (f(f(x)) + e^x)' \Leftrightarrow e^{f(x)} f'(x) + 1 = f'(f(x)) f'(x) + e^x.$$

Για $x = \rho$

$$e^{f(\rho)} f'(\rho) + 1 = f'(f(\rho)) f'(\rho) + e^\rho \Leftrightarrow 0 + 1 = 0 + e^\rho \Leftrightarrow e^\rho = 1 \Leftrightarrow \rho = 0$$

οπότε $f'(0) = 0$

Άτοπο αφού είναι $f'(0) = 1$

β) Η f' συνεχής στο \mathbb{R} (αφού υπάρχει η f'') και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (από το

α). Έπεται ότι η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο \mathbb{R} και επειδή $f'(0) = 1 > 0$.

Έπεται ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα f γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Δ3.

$$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

- Η f γνησίως αύξουσα και συνεχής στο \mathbb{R} άρα $f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$ από τα παραπάνω προκύπτει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (άρα και $f(x) > 0$ σε διάστημα $(a, +\infty)$).

▪

$$|\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x| \leq |\eta\mu x| + |\sigma\upsilon\nu x| \leq 2$$

$$\left| \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \right| \leq \frac{2}{|f(x)|}$$

▪

$$\left| \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \right| \leq \frac{2}{f(x)} \Leftrightarrow -\frac{2}{f(x)} \leq \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \leq \frac{2}{f(x)}$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{f(x)} \right) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{f(x)} = 0$ οπότε από κριτήριο παρεμβολής προκύπτει

$$\text{ότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} = 0,$$

Δ4. Θέτω $u = \ln x$ οπότε $du = \frac{1}{x} dx$.

- $\begin{cases} \text{Για } x = 1 \text{ είναι } u = 0 \\ \text{Για } x = e^\pi \text{ είναι } u = \pi \end{cases}$

- Έτσι $\int_0^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx = \int_0^\pi f(u) du = \int_0^\pi f(x) dx$.

- Η f γνησίως αύξουσα στο $[0, \pi]$ $f(0) = 0, f(\pi) = \pi$ και για $0 < x < \pi$ έπεται

$$f(0) < f(x) < f(\pi) \Leftrightarrow 0 < f(x) < \pi \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ \text{και} \\ \pi - f(x) > 0 \end{cases}$$

- Έτσι $\int_0^\pi f(x) dx > 0$ και $\int_0^\pi (\pi - f(x)) dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^\pi \pi dx - \int_0^\pi f(x) dx > 0 \Leftrightarrow$

- $\pi^2 > \int_0^\pi f(x) dx$ από τα παραπάνω προκύπτει $0 < \int_0^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi^2$

Επιμέλεια: Κανακάκης Γεώργιος

Μακρίδης Ηλίας

Οικονομόπουλος Αναστάσιος

Πεφάνης Κωνσταντίνος

Ρούτης Κωνσταντίνος