

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)**

**ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017 – ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Βλέπε θεωρία σχολικού βιβλίου.

A2.

α. Ψευδής.

β. Έστω $f(x) = |x|$

Η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} και στο $x_0 = 0$. Αποδεικνύω ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

$$\text{Αν } x > 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\text{Αν } x < 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

Άρα, δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

A3. Βλέπε ορισμό σχολικού βιβλίου.

A4. α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Λάθος

δ) Σωστό

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1.

$$A_f = (0, +\infty) \qquad A_g = R - \{1\}$$

$$A' = \{x/x \in A_g; g(x) \in A_f\} =$$

$$A' = \left\{x / x \in R - \{1\}; \frac{x}{1-x} \in (0, +\infty)\right\}$$

$$\frac{x}{1-x} > 0 \Leftrightarrow x(1-x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0,1)$$

$$A' = (0,1) \text{ και } (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x}{1-x}\right) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

B2. Έστω $x_1, x_2 \in (0,1)$ με $h(x_1) = h(x_2) \Leftrightarrow$

$$\ln\left(\frac{x_1}{1-x_1}\right) = \ln\left(\frac{x_2}{1-x_2}\right) \stackrel{\ln}{\Leftrightarrow} \frac{x_1}{1-x_1} = \frac{x_2}{1-x_2} \Leftrightarrow x_1 - x_1x_2 = x_2 - x_1x_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η h είναι 1-1, οπότε αντιστρέφεται.

$$y = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \Leftrightarrow e^y = \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow e^y - xe^y = x \Leftrightarrow e^y = x(1+e^y) \stackrel{e^y+1 \neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$x = \frac{e^y}{1+e^y}$$

$$0 < x < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{e^y}{1+e^y} < 1 \text{ Ισχύει:}$$

$$h^{-1}(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \quad h^{-1}: R \rightarrow R$$

B3. $\varphi(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$

Η φ είναι συνεχής παραγωγίσιμη ως πηλίκο συνεχών παραγωγίσιμων.

$$\varphi'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - e^x \cdot e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} > 0 \Rightarrow \varphi = \text{γνησίως αύξουσα στο } R.$$

$$\varphi''(x) = \frac{e^x(e^x+1)^2 - e^x \cdot 2(e^x+1) \cdot e^x}{(e^x+1)^4} = \frac{e^x(e^x+1) - 2e^{2x}}{(e^x+1)^3} = \frac{e^x - e^{2x}}{(e^x+1)^3}$$

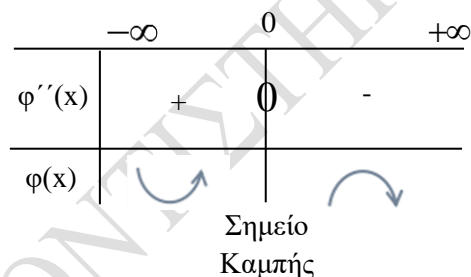
$$\varphi''(x) = e^x - e^{2x} = 0 \Leftrightarrow 2x = x \Leftrightarrow x = 0$$

$$\varphi''(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - e^{2x} > 0$$

$$\Leftrightarrow e^x > e^{2x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x > 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x < 0$$



Ομοίως $\varphi''(x) < 0$ για $x > 0$.

Στο $x_0 = 0$ η φ παρουσιάζει σημείο καμπής $P(0, \varphi(0))$ και $P\left(0, \frac{1}{2}\right)$ το $\varphi(0) = \frac{1}{2}$.

B4.

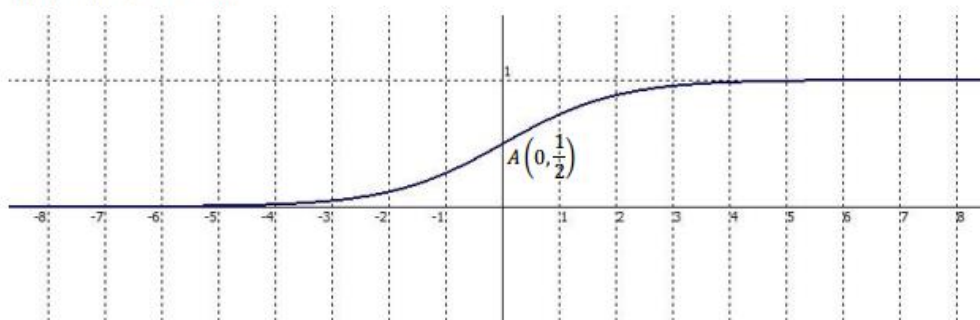
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x+1} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

Άρα $y = 1$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = 0 \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \right)$$

Άρα $y = 0$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$

Γραφική παράσταση:



Γ1. $f(x) = -\eta\mu x \quad x \in [0, \pi]$

Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = -\sigma\upsilon\nu x \quad x \in [0, \pi]$

Έστω (ε) εφαπτομένη της C_f και $(x_0, f(x_0))$ σημείο επαφής.

$$(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y + \eta\mu x_0 = -\sigma\upsilon\nu x_0(x - x_0)$$

$$A\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) \in (\varepsilon): -\frac{\pi}{2} + \eta\mu x_0 = -\sigma\upsilon\nu x_0\left(\frac{\pi}{2} - x_0\right) \quad (1)$$

Αρκεί να δείξω ότι η (1) έχει ακριβώς δύο ρίζες.

Θεωρώ: $\varphi(x) = -\frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu x + x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x + \frac{\pi}{2}, x \in [0, \pi]$

$$\varphi'(x) = \frac{\pi}{2}\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x\left(\frac{\pi}{2} - x\right), x \in [0, \pi]$$

$$\varphi'(x) \geq 0 \stackrel{x \in [0, \pi]}{\Rightarrow} \frac{\pi}{2} - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{\pi}{2}$$

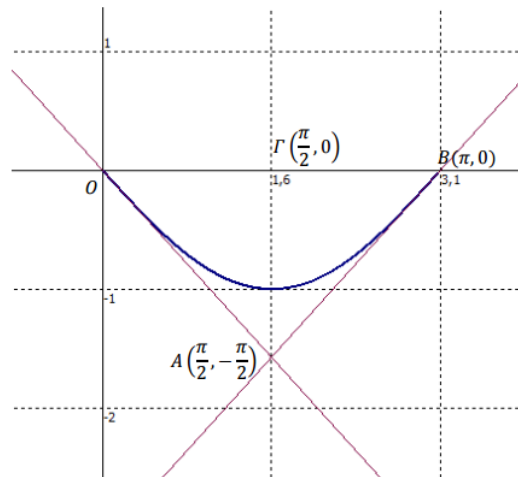
και $\left. \begin{matrix} \varphi(0) = 0 \\ \varphi(\pi) = 0 \end{matrix} \right\}$ μοναδικές ρίζες

Για $x_0 = 0, (\varepsilon_1): y = -x$

Για $x_0 = \pi, (\varepsilon_2): y = x - \pi$

	0	$\pi/2$	π		
$\varphi'(x)$	0	+	0	-	0
$\varphi(x)$	γνησίως αύξουσα		γνησίως φθίνουσα		

Γ2.



$$E_1 = 2 \int_0^{\pi/2} (-\eta\mu x + x) dx = 2 \left[\sigma\upsilon\nu x + \frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi/2} = 2 \left(\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} - \sigma\upsilon\nu 0 - 0 \right)$$

$$= 2 \left(0 + \frac{\pi^2}{8} - 1 \right) = 2 \left(\frac{\pi^2}{8} - 1 \right)$$

$$E_2 = \int_0^{\pi} (-f(x)) dx = \int_0^{\pi} \eta\mu x dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} = -\sigma\upsilon\nu \pi + \sigma\upsilon\nu 0 = 1 + 1 = 2$$

$$\acute{\alpha}\rho\alpha \frac{E_1}{E_2} = \frac{2\left(\frac{\pi^2}{8}-1\right)}{2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$$

Γ3.

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\eta\mu x+x}{-\eta\mu x-x+\pi} = +\infty \text{ γιατί:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} (-\eta\mu x + x) = 0 + \pi = \pi$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} (-\eta\mu x - x + \pi) = 0$$

$$\mu\epsilon \quad -\eta\mu x - x + \pi > 0 \Leftrightarrow f(x) < -x + \pi \quad \text{και} \quad f(x) < -x + \pi$$

Γ4. Ισχύει $f(x) > \varepsilon_2$

$$f(x) > x - \pi \xrightarrow{x>0} \frac{f(x)}{x} > 1 - \frac{\pi}{x}$$

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > \int_1^e \left(1 - \frac{\pi}{x}\right) dx$$

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > [x - \pi \ln|x|]_1^e$$

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > e - \pi \ln e - 1 + \pi \ln 1$$

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > e - \pi - 1$$

ΘΕΜΑ Δ

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^4}, & x \in [-1, 0) \\ e^x \eta \mu x, & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Δ1.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[3]{x^4} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x \eta \mu x) = e^0 \cdot 0 = 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } 0 \text{ και } f \text{ συνεχής στο } [-1, 0) \text{ ως άρρητη} \\ f \text{ συνεχής στο } (0, \pi] \text{ ως γινόμενο συνεχών} \end{array}$$

Άρα f συνεχής στο $[-1, \pi]$.

$$\text{Για } -1 \leq x < 0: f'(x) = (\sqrt[3]{x^4})' = (x^{4/3})' = -\frac{4}{3} \sqrt[3]{-x}$$

$$0 < x < \pi: f'(x) = (e^x \eta \mu x)' = e^x \eta \mu x + e^x \sigma \upsilon \nu x = e^x (\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x)$$

$$\text{και } \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{x^4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-x)^{4/3}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} [-(-x)^{1/3}] = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x \eta \mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^x \cdot \frac{\eta \mu x}{x} \right) = e^0 \cdot 1 = 1 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

$$\text{Για } -1 < x < 0: f'(x) < 0$$

$$\text{Για } 0 < x \leq \pi: f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) \geq 0 \stackrel{e^x > 0}{\Rightarrow} \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \geq 0$$

$$\text{Λύνω: } \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = -\sigma\upsilon\nu x \stackrel{\sigma\upsilon\nu x \neq 0}{\Rightarrow} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \epsilon\varphi x = -1 \stackrel{0 < x < \pi}{\Rightarrow} x = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{Κρίσιμα σημεία: } x = 0 \text{ και } x = \frac{3\pi}{4}$$

Δ2. Από (Δ1) $f'(x) < 0$ για $-1 < x < 0$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0, \pi]$ άρα διατηρεί πρόσημο στα διαστήματα που

ορίζουν οι ρίζες της και $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} > 0, f'(\pi) = -e^\pi < 0$

	-1	0	3π/4	π
f'(x)	-	+	0	-
f(x)	γνησίως φθίνουσα	γνησίως αύξουσα	γνησίως φθίνουσα	

$$\text{T.M. } f(-1) = 1$$

$$\text{T.E. } f(0) = 0$$

$$\text{T.M. } f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = e^{3\pi/4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Σύνολο Τιμών: } \left[0, \frac{\sqrt{2}e^{3\pi/4}}{2}\right]$$

$$\text{T.E. } f(\pi) = 0$$

$$\Delta 3. E = \int_0^{\pi} |f(x) - g(x)| dx$$

Για $x \in [0, \pi]$:

$$\text{Θεωρώ: } f(x) - g(x) = e^x \eta \mu x - e^{5x} = e^x (\eta \mu x - e^{4x})$$

$$\text{Θεωρώ: } h(x) = \eta \mu x - e^{4x}, x \in [0, \pi]$$

$$\text{Θεωρώ: } h'(x) = \sigma \upsilon \nu x - 4e^{4x}, x \in [0, \pi]$$

$$\text{Θεωρώ: } h''(x) = -\eta \mu x - 16e^{4x} = -(\eta \mu x + 16e^{4x}) < 0, \text{ για κάθε } x \in [0, \pi]$$

Άρα η h' γνησίως φθίνουσα και $h'(0) = 1 - 4e^0 < 0$ οπότε $h'(x) < 0$ για κάθε $x \in [0, \pi]$

Άρα η h γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$ και $h(0) = 1 < 0$ οπότε $h(x) < 0$ για κάθε $x \in [0, \pi]$

$$\text{Τότε } f(x) - g(x) < 0 \text{ άρα } E = \int_0^{\pi} (g(x) - f(x)) dx = \int_0^{\pi} (e^{5x} - e^x \eta \mu x) dx =$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\pi} e^{5x} dx - \int_0^{\pi} e^x \eta \mu x dx = \\ &= \left[\frac{e^{5x}}{5} \right]_0^{\pi} - I_1 = \frac{e^{5\pi} - 1}{5} - \frac{e^{\pi} + 1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2): I_1 &= \int_0^{\pi} e^x \eta \mu x dx = \int_0^{\pi} (e^x)' \eta \mu x dx = [e^x \eta \mu x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \sigma \upsilon \nu x dx = \\ &= [e^x \eta \mu x]_0^{\pi} - [e^x \sigma \upsilon \nu x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \eta \mu x dx \end{aligned}$$

$$\text{Δηλαδή: } I_1 = [e^x \eta \mu x]_0^{\pi} - [e^x \sigma \upsilon \nu x]_0^{\pi} - I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{[e^x \eta \mu x]_0^{\pi} - [e^x \sigma \upsilon \nu x]_0^{\pi}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{e^{\pi} \eta \mu \pi - e^0 \eta \mu 0 - e^{\pi} \sigma \upsilon \nu \pi + e^0 \sigma \upsilon \nu 0}{2} \Rightarrow I_1 = \frac{e^{\pi} + 1}{2}$$

Δ4.

$$16e^{-\frac{3\pi}{4}} \cdot f(x) - e^{-\frac{3\pi}{4}} \cdot (4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2} \cdot 16e^{-3\pi/4} \Rightarrow$$

$$f(x) - \frac{(4x - 3\pi)^2}{16} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{3\pi/4}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{3\pi/4} + \frac{(4x - 3\pi)^2}{16} \left\{ \frac{(4x - 3\pi)^2}{16} \leq 0 \right.$$

$$\text{Από (Δ2) ισχύει: } f(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} e^{3\pi/4}$$

$$\text{Ισχύει μόνο για } \frac{(4x - 3\pi)^2}{16} = 0 \Leftrightarrow 4x = 3\pi \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4}$$

Επιμέλεια: Βασιλάτος Κοσμάς

Κανακάκης Γιώργος

Κατωπόδης Σπύρος

Μακρίδης Ηλίας

Οικονομόπουλος Αναστάσιος

Πεφάνης Κωνσταντίνος

Ρούτης Κωνσταντίνος