

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

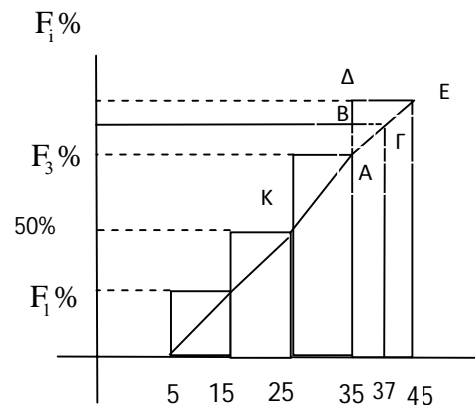
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Θεωρία. *Βλέπε:* σελίδα 31 του σχολικού βιβλίου.
- A2.** Θεωρία. *Βλέπε:* σελίδα 148 του σχολικού βιβλίου.
- A3.** Θεωρία. *Βλέπε:* σελίδα 96 του σχολικού βιβλίου.
- A4.**
- α.** Λάθος
 - β.** Σωστό
 - γ.** Λάθος
 - δ.** Σωστό
 - ε.** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. Από το 50% φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς τον οριζόντιο άξονα. Αυτή τέμνει το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων % στο σημείο Κ, το οποίο προβάλλουμε στον οριζόντιο άξονα. Άρα $\delta=25$.



B2.

Χρόνοι	x_i	v_i	$f_i \%$	N_i	$F_i \%$
[5-15)	10	$\alpha+4=12$	$f_1 = 20$	12	$F_1 = 20$
[15-25)	20	$3\alpha - 6=18$	$f_2 = 30$	30	$F_2 = 50$
[25-35)	30	$2\alpha-8=24$	$f_3 = 40$	54	$F_3 = 90$
[35-45)	40	$\alpha-2=6$	$f_4 = 10$	60	100
Σύνολο	-	60	100	-	-

$$v = \alpha + 4 + 3\alpha - 6 + 2\alpha + 8 + \alpha - 2 \Rightarrow v = 7\alpha + 4$$

$$F_2 = f_1 + f_2 \Rightarrow 0,50 = \frac{\alpha + 4}{7\alpha + 4} + \frac{3\alpha - 6}{7\alpha + 4} \Rightarrow 0,5 = \frac{4\alpha - 2}{7\alpha + 4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3,5\alpha + 2 = 4\alpha - 2 \Rightarrow 4 = 0,5\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{4}{0,5} \Rightarrow \boxed{\alpha = 8}$$

$$\text{B3. } \bar{x} = \frac{\sum x_i v_i}{v} = \frac{120 + 360 + 720 + 240}{60} = \frac{1440}{60} = 24 \text{ Άρα } \bar{x} = 24$$

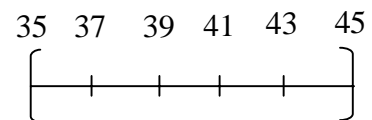
$$s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v (x_i - \bar{x})^2 v_i \Rightarrow s^2 = \frac{1}{60} \{ (10 - 24)^2 \cdot 12 + (20 - 24)^2 \cdot 18 + (30 - 24)^2 \cdot 24 + (40 - 24)^2 \cdot 6 \}$$

$$\Rightarrow s^2 = \frac{1}{60} (14^2 \cdot 12 + 4^2 \cdot 18 + 6^2 \cdot 24 + 16^2 \cdot 6) \Rightarrow s^2 = 84 \Rightarrow s = \sqrt{84} \Rightarrow \boxed{s \cong 9,17}$$

B4.

✎ **α' τρόπος:** Το τμήμα πάνω από τα 37 min

αντιστοιχεί στα $\frac{4}{5}$ της κλάσης.



$$\frac{4}{5} \cdot 10 = \frac{40}{5} = 8$$

Άρα το 8% χρειάστηκε τουλάχιστον 37 λεπτά (min).

✎ **β' τρόπος:** Από το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων:

$$\hat{A}B\hat{\Gamma} \simeq \hat{A}\hat{\Delta}E \quad \text{άρα} \quad \frac{AB}{A\hat{\Delta}} = \frac{B\hat{\Gamma}}{\hat{\Delta}E} \Leftrightarrow \frac{AB}{10} = \frac{2}{10} \Leftrightarrow AB = 2$$

Άρα το 8% χρειάστηκε τουλάχιστον 37 λεπτά (min).

ΘΕΜΑ Γ

Αφού ο μαθητής επιλέγεται τυχαία θα χρησιμοποιήσουμε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας.

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

Γ: Ο μαθητής μαθαίνει Γαλλικά

Ι: Ο μαθητής μαθαίνει Ισπανικά

$$\text{Ισχύει } P(\Gamma) = \frac{3v}{v^2+1}, \quad P(I) = \frac{v+2}{v^2+1} \quad \text{και} \quad P(\Gamma \cap I) = \frac{v+1}{v^2+1}$$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(\sqrt{x^2+3}-2)}{x^2+x} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}{x(x+1)(\sqrt{x^2+3}-2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x^2-1)}{x(x+1)(\sqrt{x^2+3}-2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x-1)\cancel{(x+1)}}{x(x+1)(\sqrt{x^2+3}-2)} = \\ &= \frac{2(-1-1)}{-1(\sqrt{1+3}+2)} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } P(\Gamma \cup I) = 1$$

Γ1. Είναι $P(\Gamma \cup I) = 1$ άρα το ενδεχόμενο $\Gamma \cup I$: «Ο μαθητής μαθαίνει μία τουλάχιστον από τις παραπάνω γλώσσες» είναι βέβαιο.

Γ2. Ισχύει: $P(\Gamma \cup I) = P(\Gamma) + P(I) - P(\Gamma \cap I) \Leftrightarrow$

$$1 = \frac{3v}{v^2+1} + \frac{v+2}{v^2+1} - \frac{v+1}{v^2+1} \Leftrightarrow v^2+1 = 3v+v+2-(v+1) \Leftrightarrow$$

$$v^2 - 3v = 0 \Leftrightarrow v(v-3) = 0 \Leftrightarrow v = 0 \text{ ή } v = 3$$

Η τιμή $v = 0$ απορρίπτεται διότι από την υπόθεση $v \geq 3$

Γ3. Ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $(\Gamma - I) \cup (I - \Gamma)$. Επειδή τα ενδεχόμενα $\Gamma - I$, $I - \Gamma$ είναι ασυμβίβαστα θα ισχύει:

$$\begin{aligned} P[(\Gamma - I) \cup (I - \Gamma)] &= P(\Gamma - I) + P(I - \Gamma) = P(\Gamma) - P(\Gamma \cap I) + P(I) - P(I \cap \Gamma) = \\ &= [P(\Gamma) + P(I) - P(\Gamma \cap I)] - P(I \cap \Gamma) = \\ &= P(\Gamma \cup I) - P(I \cap \Gamma) = 1 - \frac{v+1}{v^2+1} \stackrel{v=3}{=} 1 - \frac{4}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Γ4. Είναι $N(\Gamma \cap I) = 32$ και $P(\Gamma \cap I) = \frac{N(\Gamma \cap I)}{N(\Omega)}$ (κλασικός ορισμός πιθανότητας,

αφού οι μαθητές έχουν την ίδια δυνατότητα επιλογής).

$$\text{Άρα } \frac{v+1}{v^2+1} = \frac{32}{N(\Omega)} \stackrel{v=3}{\Rightarrow} \frac{4}{10} = \frac{32}{N(\Omega)} \Rightarrow N(\Omega) = 80$$



Άρα οι μαθητές της τάξης είναι $v = 80$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη με: $f'(x) = \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x - 1 - \ln^2 x}{x^2} = \frac{-(\ln x - 1)^2}{x^2}$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ αφού είναι συνεχής στο $x_0 = e$.

Δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

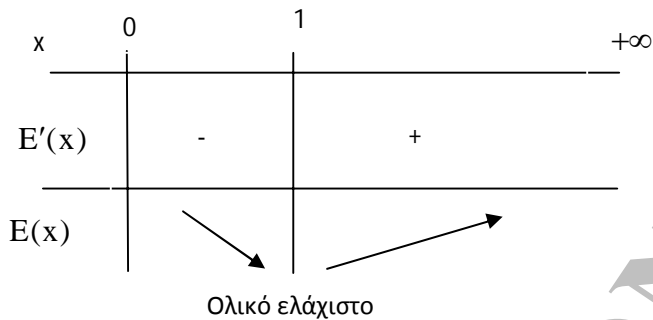
x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-
$f(x)$			

Δ2. Το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΟΚΛΜ είναι

$$E = \beta \cdot \nu = x \cdot f(x) = x \cdot \frac{1 + \ln^2 x}{x} \quad \text{Δηλαδή } E(x) = 1 + \ln^2 x$$

Η $E(x)$ είναι παραγωγίσιμη για $x > 0$ με $E'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$

$$E'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1. \text{ Άρα:}$$



Άρα για $x=1$ το εμβαδό γίνεται ελάχιστο και τότε $ΟΚ = x = 1, f(1) = 1 = ΟΛ$ οπότε το ΟΚΛΜ είναι τετράγωνο.

Δ3. $\lambda = f'(1)$ αφού η εφαπτομένη στο $\Sigma(1, f(1))$

$$\lambda = -1 \text{ είναι παράλληλη στην } \varepsilon: y = \lambda x + \beta$$

Άρα $\varepsilon: y = -x + \beta$ και για τα 10 σημεία της έχουμε :

$$y_i = -x_i + \beta \text{ οπότε από εφαρμογή του βιβλίου } \bar{y} = -\bar{x} + \beta \Rightarrow \bar{y} = -10 + \beta \text{ και}$$

$$s_y = s_x = 2.$$

$$\text{Για να είναι το δείγμα ομοιογενές πρέπει : } CV_y \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{s_y}{|\bar{y}|} \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{2}{|-10 + \beta|} \leq \frac{1}{10}$$

$$\frac{|-10 + \beta|}{2} \geq 10 \Rightarrow |-10 + \beta| \geq 20 \quad \begin{cases} -10 + \beta \geq 20 \Rightarrow \beta \geq 30 \\ -10 + \beta \leq -20 \Rightarrow \beta \leq -10 \end{cases}$$

$$\text{Άρα } \beta \in (-\infty, -10) \cup [30, +\infty)$$

$$\Delta 4. f(P(A)) + f(P(A \cap B)) \geq 2f(P(A \cup B))$$

Ισχύει $A \subseteq A \cup B$ άρα $P(A) \leq P(A \cup B) \stackrel{f \nearrow}{\Rightarrow} f(P(A)) \geq f(P(A \cup B))$ (1)

Ισχύει $A \cap B \subseteq A \cup B$ άρα

$$P(A \cap B) \leq P(A \cup B) \stackrel{f \nearrow}{\Rightarrow} f(P(A \cap B)) \geq f(P(A \cup B))$$
 (2)

Από (1)+(2) $\Rightarrow f(P(A)) + f(P(A \cap B)) \geq 2f(P(A \cup B))$

Επιμέλεια: Μακρίδης Ηλίας

Μπαμπέ Αφροδίτη

Πεφάνης Κωνσταντίνος