

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**  
**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ****ΘΕΜΑ Α**

- A1. Θεωρία, βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 28.
- A2. Θεωρία, βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 14.
- A3. Θεωρία, βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 87.
- A4.
- α) Λάθος
- β) Σωστό
- γ) Λάθος
- δ) Λάθος
- ε) Λάθος

**ΘΕΜΑ Β****B1.**

$$\begin{aligned} \varnothing P(\omega_1) &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{x^3 + x^2} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x + 1 - 1}{x^2(x+1)(\sqrt{x^2 + x + 1} + 1)} = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x(\sqrt{x^2 + x + 1} + 1)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(-1) \cdot 2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\varnothing f'(x) = \left( \frac{x}{3} \ln x \right)' = \frac{1}{3} \ln x + \frac{x}{3} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \ln x + \frac{1}{3}$$

$$\varnothing f'(1) = \frac{1}{3} \ln 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Άρα } P(\omega_3) = \frac{1}{3}$$

**B2.**

✗ Αφού  $P(\omega_1) \neq P(\omega_3)$  τα στοιχειώδη ενδεχόμενα του  $\Omega$  δεν είναι ισοπίθανα, οπότε χρησιμοποιώ τον αξιωματικό ορισμό πιθανότητας και  $P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_4)$ .

✗ Αν  $\Gamma = \{\omega_3\}$  έχουμε:  $\Gamma \subseteq A'$ , άρα  $P(\Gamma) \leq P(A') \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq P(A')$

✗ Αν  $\Delta = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$  τότε:  $A' \subseteq \Delta$ , άρα  $P(A') \leq P(\Delta) = 1 - P(\omega_1) = \frac{3}{4}$

**B3.**

$P(A') = \frac{3}{4}$  και  $A' = \{\omega_2, \omega_3\}$ , άρα:

✗  $P(\omega_2) + P(\omega_3) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(\omega_2) + \frac{1}{3} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(\omega_2) = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$

✗  $P(\omega_4) = P(A) - P(\omega_1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$

✚ **α' τρόπος:**

$$\begin{aligned} P[(A-B) \cup (B-A)] & \stackrel{\substack{[(A-B), (B-A)] \\ \text{ασυμβίβαστα}}}{=} P(A-B) + P(B-A) = \\ & = P(\omega_4) + P(\omega_3) = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

✚ **β' τρόπος:**

$$\begin{aligned} P[(A-B) \cup (B-A)] & = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = \\ & = \frac{1}{4} + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{7}{12} - 2P(\omega_1) = \\ & = \frac{3}{12} + \frac{7}{12} - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{10}{12} - \frac{6}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

✚ **α' τρόπος:**

Για το  $P(A' - B')$ :

✗  $A' = \{\omega_2, \omega_3\}$

$$\otimes B' = \{\omega_2, \omega_4\}$$

$$\otimes A' - B' = \{\omega_3\}, \text{ δηλαδή } P(A' - B') = P(\omega_3) = \frac{1}{3}$$

✚ **β' τρόπος:**

$$\begin{aligned} \otimes P(A' - B') &= P(A' \cap B) = P(B \cap A') = P(B - A) = \\ &= P(B) - P(A \cap B) = \frac{7}{12} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12} - \frac{3}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

### ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

✘ Θεωρώντας την πρώτη κλάση:  $[\alpha, \alpha + c)$ , έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = 50 \\ \text{και} \\ x_4 = \frac{\alpha + 3c + \alpha + 4c}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha = 50 \\ \text{και} \\ 170 = 2\alpha + 7c \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha = 50 \\ \text{και} \\ c = \frac{170 - 100}{7} = 10 \end{array} \right\} c = 10$$

Γ2.

	$x_i$	$f_i$
[50,60)	55	0,1
[60,70)	65	0,3
[70,80)	75	0,2
[80,90)	85	0,4

Γιατί:

$$\otimes f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 \quad (1) \text{ Θεωρία}$$

$$\otimes \delta = 75 \Leftrightarrow f_1 + f_2 + \frac{1}{2}f_3 = 0,5 \quad (2)$$

$$\otimes f_4 = 2f_3 \quad (3)$$

$$\otimes \bar{x} = 74 \Leftrightarrow 55f_1 + 65f_2 + 73f_3 + 85f_4 = 74 \quad (4)$$

$$\otimes \text{ Από την (1), (2): } \frac{1}{2}f_3 + f_4 = 0,5 \text{ και } f_4 = 2f_3$$

$$\text{Άρα } \frac{1}{2}f_3 + 2f_3 = 0,5 \Leftrightarrow \frac{5}{2}f_3 = 0,5 \Leftrightarrow \boxed{f_3 = 0,2}, \boxed{f_4 = 0,4}$$

Οπότε η <sup>(1)</sup> $\rightarrow f_1 + f_2 = 0,4$ , δηλαδή  $f_2 = 0,4 - f_1$  και

$$\eta \xrightarrow{(4)} 55f_1 + 65(0,4 - f_1) + 15 + 34 = 74 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 55f_1 + 26 - 65f_1 + 49 = 74 \Leftrightarrow -10f_1 = -1 \Leftrightarrow f_1 = \frac{1}{10} = 0,1$$

και  $f_2 = 0,4 - f_1 = 0,3$

**Γ3.**

$$\otimes f_1 = 0,1 \Leftrightarrow v_1 = 0,1v$$

$$\otimes f_2 = 0,3 \Leftrightarrow v_2 = 0,3v$$

$$\otimes f_3 = 0,2 \Leftrightarrow v_3 = 0,2v$$

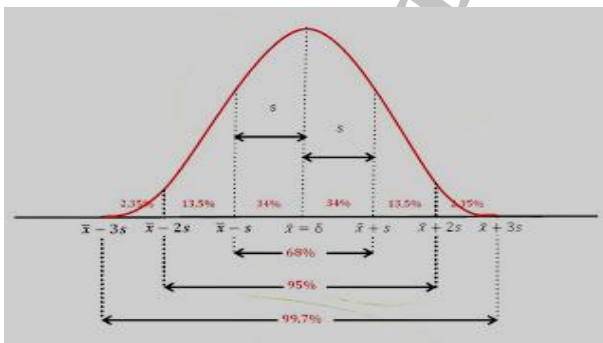
$\otimes$  Οπότε η ζητούμενη  $\bar{x}$  είναι:

$$\bar{x} = \frac{55 \cdot 0,1v + 65 \cdot 0,3v + 75 \cdot 0,2v}{0,6v} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{5,5 + 19,5 + 15}{0,6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bar{x} = \frac{40,0}{0,6} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{400}{6} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{200}{3}$$

**Γ4.** Από την θεωρία έχουμε την καμπύλη της κανονικής κατανομής και τα στοιχεία της που είναι:

Από την καμπύλη έχουμε ότι το:



$\otimes$  2,5% έχει τιμή τουλάχιστον  $\bar{x} + 2s$ .

$\otimes$  Και από τα δεδομένα το 2,5% έχει τιμή τουλάχιστον 74. Άρα

$$\boxed{\bar{x} + 2s = 74} \quad (1).$$

$\otimes$  Το 16% από τη θεωρία είναι το πολύ  $\bar{x} - s$  και από τα δεδομένα το

$$\text{πολύ } 68. \text{ Άρα } \boxed{\bar{x} - s = 68} \quad (2)$$

$$\text{Από (1), (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{x} + 2s = 74 \\ \bar{x} - s = 68 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{x} + 2s = 74 \\ 2\bar{x} - 2s = 136 \quad (+) \end{cases}$$

$$3\bar{x} = 210 \Leftrightarrow \bar{x} = 70, \text{ άρα } s = 2$$

$$\text{Οπότε } CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{70} = 0,026 < 10\%, \text{ δηλαδή ομοιογενές.}$$

### ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.**

Η εφαπτομένη στο  $(1, f(1))$  είναι:

$$y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \quad \Leftrightarrow \quad y - \kappa = x - 1 \Leftrightarrow y = x + \kappa - 1$$

Τα σημεία τομής της με τους άξονες είναι:  $A(0, \kappa - 1)$  και  $B(1 - \kappa, 0)$ .

$$\text{Οπότε } (OAB) = \frac{1}{2} |\kappa - 1| \cdot |1 - \kappa| = \frac{(\kappa - 1)^2}{2} \text{ και}$$

$$\frac{(\kappa - 1)^2}{2} < 2 \Leftrightarrow (\kappa - 1)^2 < 4 \Leftrightarrow |\kappa - 1| < 2 \Leftrightarrow -2 < \kappa - 1 < 2 \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} -1 < \kappa < 3 \\ \kappa > 1 \end{matrix} \right\} \boxed{\kappa = 2}$$

**Δ2.**

**α)** Αφού τα σημεία ανήκουν στην  $(\varepsilon)$ :

$y = x + \kappa - 1$ , οπότε από εφαρμογή του βιβλίου

$$\bar{y} = \bar{x} + \kappa - 1 \xrightarrow[\kappa=2]{\bar{y}=31} \bar{x} = 31 - 1 = 30$$

$$\beta) \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i + 20 \cdot 3 + \sum_{i=20}^{35} x_i + \sum_{i=35}^{50} x_i - 15\lambda}{50}$$

$$\text{Θέλουμε } \bar{x} = 31, \text{ άρα } 31 = \frac{\sum_{i=1}^{50} x_i + 60 - 15\lambda}{50} \Leftrightarrow 1550 = 30 \cdot 50 + 60 - 15\lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15\lambda = 1500 + 60 - 1550 \Leftrightarrow 15\lambda = 10 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

Δ3. Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$ , με

$$f'(x) = \ln x + 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
f'		0	
f			

Για το εύρος διατάσσουμε τους αριθμούς σε αύξουσα σειρά και έχουμε:

$$\frac{1}{e} < \alpha < \beta < \gamma < e \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} f \text{ γνησίως} \\ \text{αύξουσα στο } \left[\frac{1}{e}, +\infty\right) \end{array}$$

$$\Rightarrow 0 < 2 - \frac{1}{e} = f\left(\frac{1}{e}\right) < f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(e).$$

Άρα:

$$0 = f'\left(\frac{1}{e}\right) < f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(e)$$

$$\text{και } R = f(e) - f'\left(\frac{1}{e}\right) = f(e) - 0 = e \ln e + 2 = e + 2$$

$$\text{και } \bar{x} = \frac{f(e) + f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) + f'\left(\frac{1}{e}\right)}{5} \Leftrightarrow$$

$$\bar{x} = \frac{e + 2 + \alpha \ln \alpha + 2 + \beta \ln \beta + 2 + \gamma \ln \gamma + 2}{5} \Leftrightarrow$$

$$\bar{x} = \frac{e + 8 + \ln \alpha^\alpha \cdot \beta^\beta \cdot \gamma^\gamma}{5} \Leftrightarrow$$

$$\bar{x} = \frac{e + 8 + 7}{5} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{e + 15}{5}$$

Δ4.

⊗ Ο Ω έχει ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα οπότε χρησιμοποιούμε τον κλασσικό ορισμό πιθανότητας.

⊗ Τα ενδεχόμενα A, B δίνονται περιγραφικά, οπότε για να προσδιορίσουμε τα στοιχεία τους εργαζόμαστε με τις συνθήκες τους και έχουμε:

Για το A:  $f'(x) = \varepsilon\varphi\omega > 0$ , άρα  $x > \frac{1}{e}$ , δηλαδή  $A = \{t_{11}, t_{12}, \dots, t_{30}\}$

Για το B:  $f(t) > f'(t) + 1 \Leftrightarrow t \ln t + \cancel{2} > \ln t + \cancel{1} + 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t \ln t - \ln t > 0 \Leftrightarrow (t-1) \ln t > 0$$

αλλά  $t-1 < 0$ , για  $t \neq t_{30}$ , οπότε:

$$\left. \begin{array}{l} \ln t < 0 = \ln 1 \\ t \in \Omega \end{array} \right\} t = t_1, t_2, \dots, t_{29}$$

$$B = \{t_1, t_2, \dots, t_{29}\}$$

Άρα:

$$\alpha) P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

$$\beta) P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{19}{30}, \text{ γιατί } A \cap B = \{t_{11}, t_{12}, \dots, t_{29}\}$$

$$N(A \cap B) = 19$$

Επιμέλεια: Μακρίδης Ηλίας

Μπαμπέ Αφροδίτη

Πεφάνης Κων/νος